1 Kurvendiskussion /40

Die Flugbahn eines Golfballs lässt sich näherungsweise durch den Graphen der nachfolgenden Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{10}x^2$, mit $x \in D_f$

beschreiben.

Hinweise:
Der Abschlagpunkt liegt im Koordinatenursprung. Die gesamte Spielfläche ist eben und hat keine Höhenunterschiede.
(Hierbei gilt: 1 Einheit $\hat{=}$ 1 m)

1.1 In welcher Entfernung zum Abschlagpunkt kommt der Ball wieder auf den Boden? **/4**

1.2 Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion f bezogen auf die Flugbahn des Golfballes. **/2**

1.3 Welche maximale Höhe erreicht der Golfball? **/8**

1.4 In welchem Punkt ändert die Flugbahn ihre Krümmungsrichtung? Bestimmen Sie den Anstiegswinkel α der zugehörigen Tangente in diesem Punkt und deren Geradengleichung. **/12**

1.5 Wenn in einem Abstand von 8 m zum Abschlagpunkt ein 4 m hohes Hindernis wäre, würde der Ball dieses Hindernis überfliegen? **/3**

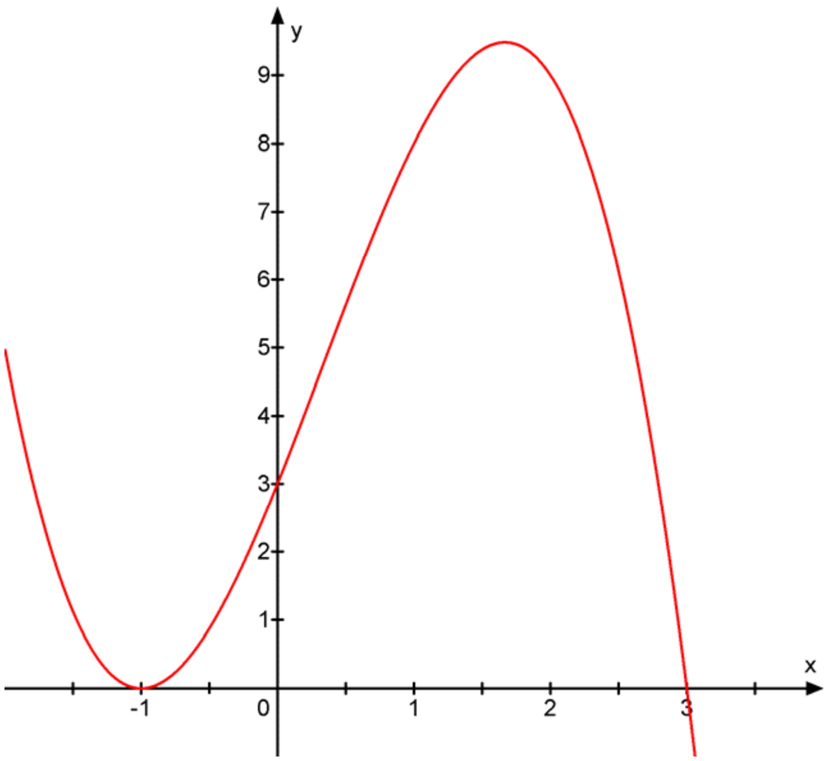
1.6 Zeichnen Sie den Verlauf der Flugbahn des Golfballs vom Abschlagpunkt bis zum Auftreffen auf den Boden in ein Koordinatensystem unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte. **/5**

1.7 Wie weit entfernt vom Abschlagpunkt befindet sich das Loch, wenn der Ball das Loch in 1 m Höhe überfliegt? Verwenden Sie hierzu ein geeignetes Näherungsverfahren (z. B. Newtonsches Näherungsverfahren) und den Startwert $x_o = 30$. Führen Sie zwei Iterationsschritte durch. **/6**

2 Rekonstruktion /15

Rekonstruieren Sie die ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph unten abgebildet ist.

(Hinweis: Verwenden Sie nur diejenigen Punkte, die sich auf den Achsen ablesen lassen.)



Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von *f*, indem Sie mit Hilfe der abzulesenden Bedingungen die entsprechenden Koeffizienten bestimmen.

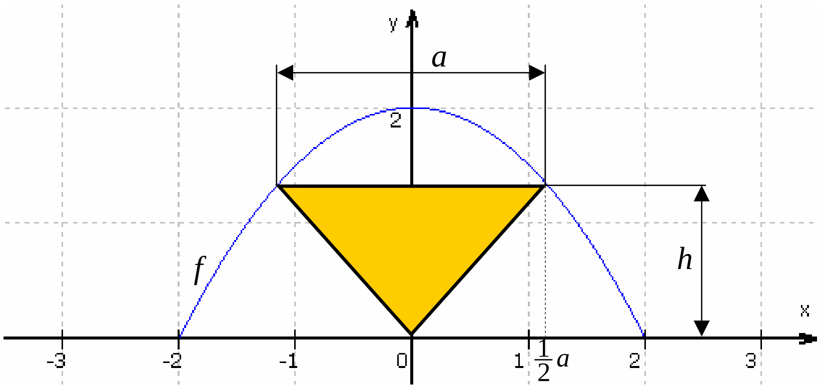
Sollten Sie die Bedingungen nicht oder nur unvollständig aufgestellt haben, lösen Sie das folgende Ersatzgleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{I:} & 0 & = & 13a & + & 5b & + & c & + & d \\
\text{II:} & 0 & = & 24a & + & 11b & + & 2c & + & d \\
\text{III:} & 3 & = & 4a & - & 3b & + & 2c & & \\
\text{IV:} & -1 & = & 9a & + & 3b & + & c & &
\end{array}$$

3 Extremwertaufgabe /15

Ein Bauunternehmer erhält den Auftrag, eine nach oben parabelförmig begrenzte senkrecht verlaufende Giebelwand einer Sporthalle (siehe Skizze) mit einer Verglasung zu versehen. Die verglaste Fläche soll hierbei ein achsensymmetrisches Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt sein. In dem vorgegebenen Koordinatensystem besitzt die Parabel folgende Funktionsgleichung:

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ und $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x \le 2\}$ mit 1 Einheit $\hat{=}$ 6 m



3.1 Zeigen Sie, dass A eine Zielfunktion ist, welche die Flächeninhalte aller möglichen in der Giebelwand achsensymmetrisch verglasten Dreiecksflächen beschreibt und die nur von der Kantenlänge a der jeweiligen Dreiecke abhängt. **/5**

Geben Sie auch den Definitionsbereich dieser Funktion A an und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Es gilt: $A(a) = -\frac{1}{16}a^3 + a$

3.2 Ermitteln Sie die Höhe und die obere Kantenlänge der dreieckförmigen Verglasung, die sich im Giebel einbauen lässt und hierbei den größten Flächeninhalt aufweist. **/8**

3.3 Erläutern Sie, ohne zu rechnen, warum einer der Funktionswerte von A ein lokales Maximum sein muss und darüber hinaus ein absolutes. **/2**

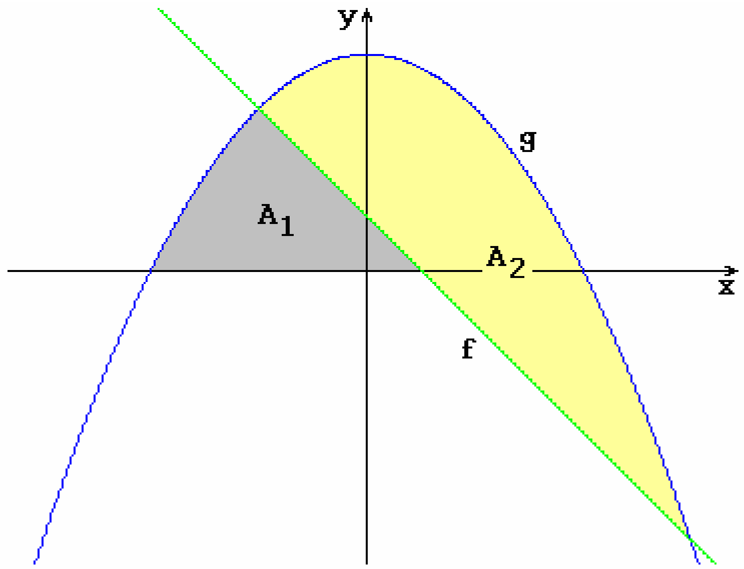
4 Integralrechnung /30

Gegeben seien die Funktionen f und g mit:

$f(x) = -x + 1;\ x \in \mathbb{R}$

bzw.

$g(x) = -0{,}25x^2 + 4;\ x \in \mathbb{R}$.



4.1 Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen von f und g mit der x-Achse. **/8**

4.2 Bestimmen Sie die x-Koordinaten der Schnittpunkte der in der obigen Skizze dargestellten Graphen von f und g. **/7**

4.3 Bestimmen Sie jeweils den exakten Flächeninhalt der Flächen A_1 und A_2. **/15**

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.1	Nullstellen von f:			
	$f(x)=0$	1		
	$-\frac{1}{288}x^3+\frac{1}{10}x^2=0$		1	
	$x^2(-\frac{1}{288}x+\frac{1}{10})=0$			
	$x_{N1/2}=0\ (Abschlagstelle)$	1		
	$-\frac{1}{288}x+\frac{1}{10}=0$			
	$x_{N3}=\frac{288}{10}=28,8$			
	Entfernung zum Abschlagpunkt: $l=28,8\,m$	1		
1.2	$D_f=x\in[0;28,8]$		2	
1.3	Hochpunkt des Graphen von f:			
	$f'(x)=0$	1		
	$-\frac{3}{288}x^2+\frac{1}{5}x=0$		2	
	$x(-\frac{3}{288}x+\frac{1}{5})=0$			
	$x_{E1}=0\ (Abschlagstelle)$	1		
	$-\frac{3}{288}x+\frac{1}{5}=0$			
	$x_{E2}=\frac{288}{15}=19,2m$	1		
	$f''(x)=-\frac{6}{288}x+\frac{1}{5}$	1		
	$f''(x_{E2})=-\frac{6}{288}\cdot 19,2+\frac{1}{5}<0\ (Maximum)$			
	$f(x_{E2})=f(19,2)=12,288$		1	
	Die maximale Höhe beträgt $12,288\,m$.	1		
1.4	Wendepunkt des Graphen von f:			
	$f''(x)=0$	1		
	$-\frac{6}{288}x+\frac{1}{5}=0$	1		
	$x_{W1}=\frac{288}{30}=9,6$			
	$f'''(x_{W1})=-\frac{6}{288}\neq 0\ (Wendestelle)$			
	$f(x_{W1})=f(9,6)=6,144$	1		
	$W(9,6\,\vert\,6,144)$			
	$f'(x_{W1})=-\frac{3}{288}{x_{W1}}^2+\frac{1}{5}x_{W1}=0,96$	2	2	
	$\tan\alpha=0,96=m_T$		1	
	$\alpha\approx 43,83°$			

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
	$y = 0{,}96 \cdot x + b$ $b = y - 0{,}96 \cdot x = 6{,}144 - 0{,}96 \cdot 9{,}6 = -3{,}07$ $y_T = 0{,}96 \cdot x - 3{,}07 \ \ (Tangentengleichung)$	1	2 1	
1.5	Funktionswert an der Stelle $x = 8$: $f(8) = -\frac{1}{288}8^3 + \frac{1}{10}8^2 = 4{,}6\overline{2} > 4$ Der Ball fliegt über das Hindernis.		2 1	
1.6	Graph der Funktion f:  		5	
1.7	$f(x) = 1$ $-\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{10}x^2 = 1$ $-\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{10}x^2 - 1 = 0$ *Nullstellenfindung z. B. mit dem Newtonverfahren* x =30 f(x) = -4,75 f'(x) = -3,3749 x = 28,5925 f(x) = -0,4111 f'(x) = -2,7971 $x \approx 28{,}6\,m$	1 1	1 3	
	Summe	16	24	0
	mögliche BE		40	

Abschlussprüfung Fachoberschule
2009 Herbst (Mathematik)
Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
2	Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$	2		
	Bedingungsgefüge: 1. $f(-1) = 0$ ($x_N = -1$ ist Nullstelle) 2. $f(3) = 0$ ($x_N = 3$ ist Nullstelle) 3. $f'(-1) = 0$ ($x_E = -1$ ist Extremstelle) 4. $f(0) = 3$ (Graph geht durch $S_y(0 \mid 3)$) Gleichungssystem: $\begin{array}{lccccccccc} \text{I:} & 0 & = & -a & + & b & - & c & + & d \\ \text{II:} & 0 & = & 27a & + & 9b & + & 3c & + & d \\ \text{III:} & 0 & = & 3a & - & 2b & + & c & & \\ \text{IV:} & 3 & = & & & & & & & d \end{array}$ Lösen des Gleichungssystems (ebenso Ersatz-LGS)		4	
	Oder man setzt an: $f(x) = a(x+1)^2(x-3)$ und ermittelt a durch Einsetzen von $S_y(0 \mid 3)$: $3 = a(0+1)^2(0-3) = -3a$ $\rightarrow a = -1$ etc.		6	
	Daraus ergibt sich (auch Ersatz-LGS): $a = -1, \quad b = 1, \quad c = 5, \quad d = 3$	2		
	und für die Funktionsgleichung: $f(x) = -x^3 + x^2 + 5x + 3$	1		
	Summe	5	10	0
	mögliche BE		15	

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
3.1	Erstellung der Zielfunktion			
	$A(a,h)=\frac{1}{2}\,a\cdot h$ als Hauptbedingung	1		
	$h=f(\frac{1}{2}a)$ als Nebenbedingung			1
	$h=-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}a)^2+2$ $=-\frac{1}{8}a^2+2$		1	
	Es folgt: $A(a)=\frac{1}{2}\,a\cdot(-\frac{1}{8}a^2+2)$ $=-\frac{1}{16}a^3+a$	1		
	Definitionsbereich $D_A=\{a\in\mathbb{R}\,\vert\,0\le a\le 4\}$ Nur für diese Kantenlängen berühren die beiden oberen Ecken der Dreiecke die parabelförmige Kante des Giebels.			1
3.2	Berechnung der oberen Kantenlänge und der Höhe: $A(a)=-\frac{1}{16}a^3+a$ $A'(a)=-\frac{3}{16}a^2+1$ $A''(a)=-\frac{3}{8}a$ $A'(a)=0$ und $A''(a)\neq 0$ ist hinreichend für Extremstellen $-\frac{3}{16}a^2+1=0 \quad \vert +\frac{3}{16}a^2$ $\frac{3}{16}a^2=1 \quad \vert \cdot\frac{16}{3}$ $a^2=\frac{16}{3} \quad \vert \mp\sqrt{\ }$ $a_{1/2}=\mp\sqrt{\frac{16}{3}}$ $a_1=-\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}$ und $a_2=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}$ $\approx -2{,}31$ $\approx 2{,}31$ Wegen $a_1\notin D_A$, ist nur $a_2\in D_A$ Extremstellenkandidat.	2		

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Mit $A''(\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}) = -\frac{3}{8}(\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3})$ $= -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$ < 0 folgt, dass $a_H = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}$ Hochstelle von A ist. $h_H = -\frac{1}{8}a_H^{\ 2} + 2$ $= -\frac{1}{8}(\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3})^2 + 2$ $= -\frac{1}{8}\cdot\frac{16}{9}\cdot 3 + 2$ $= -\frac{2}{3} + 2$ $= \frac{4}{3}$ 1 Einheit $\hat{=}$ 6 m Hieraus folgt: $a_H = 8\cdot\sqrt{3}$ $\approx 13{,}86\,\mathrm{m}$ ist als Kantenlänge bei einer Höhe von $h_H = 8$ zu wählen, damit der Flächeninhalt der Verglasung größtmöglich wird.	1	4 1	
3.3	An den beiden Rändern des Definitionsbereichs bestehen die Dreiecke nur aus einem waagerechten Strich bzw. senkrechtem Strich, das heißt, ihr Flächeninhalt ist gleich Null. Aufgrund der Skizze erkennt man, dass Dreiecke mit einem (positiven) Flächeninhalt existieren. Eines von ihnen muss deshalb nicht nur lokal, sondern auch absolut gesehen einen maximalen Wert aufweisen.		1	1
	Summe	5	7	3
	mögliche BE		15	

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4				
4.1	Schnittpunkte mit der x-Achse: setze $f(x) = -x + 1 = 0 \quad \mid -1$ $-x = -1 \quad \mid \cdot(-1)$ $x_1 = 1$ $\Rightarrow \underline{\underline{N_1(1\mid 0)}}$ setze $g(x) = -0,25x^2 + 4 = 0 \quad \mid -4$ $-0,25x^2 = -4 \quad \mid :(-0,25)$ $x^2 = 16 \quad \mid \sqrt{\ }$ $x_{2,3} = \pm 4$ $\Rightarrow \underline{\underline{N_2(-4\mid 0)}} \quad \underline{\underline{N_3(4\mid 0)}}$	2 2	2 2	
4.2	setze $f(x) = g(x)$ $-0,25x^2 + 4 = -x + 1 \quad \mid +x-1$ $-0,25x^2 + x + 3 = 0 \quad \mid :(-0,25)$ $x^2 - 4x - 12 = 0$ $x_{4,5} = 2 \pm \sqrt{4+12} = 2 \pm \sqrt{16} = 2 \pm 4$ $\underline{\underline{x_4 = 6}} \quad \underline{\underline{x_5 = -2}}$	3	4	
4.3	$A_1 = \int_{-4}^{-2} g(x)dx + \int_{-2}^{1} f(x)dx$ $= \int_{-4}^{-2} (-0,25x^2 + 4)dx + \int_{-2}^{1} (-x+1)dx$ $= \left[-\frac{1}{12}x^3 + 4x\right]_{-4}^{-2} + \left[-\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{1}$ $= \left[(\frac{8}{12}-8) - (\frac{64}{12}-16)\right] + \left[(-\frac{1}{2}+1) - (-\frac{4}{2}-2)\right]$ $= \left[-7,\overline{3} + 10,\overline{6}\right] + \left[0,5+4\right] = 3,\overline{3} + 4,5 = \underline{\underline{7,8\overline{3}FE}}$ $A_2 = \int_{-2}^{6} (g(x) - f(x))dx = \int_{-2}^{6} (-0,25x^2 + x + 3)dx$ $= \left[-\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-2}^{6}$ $= (-18+18+18) - (0,\overline{6}+2-6) = 18 + 3,\overline{3}$ $= \underline{\underline{21,\overline{3}FE}}$	2 1	3 3	3 3
	Summe	10	14	6
	mögliche BE		30	