1 Kurvendiskussion /40

Gegeben ist eine Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x)=\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{6}x^3;\ \text{mit } x\in\mathbb{R}.$$

1.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen. **/2**

1.2 Untersuchen Sie den Graphen von f auf mögliche Symmetrie. Begründen Sie Ihre Aussage. **/2**

1.3 Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen. **/7**

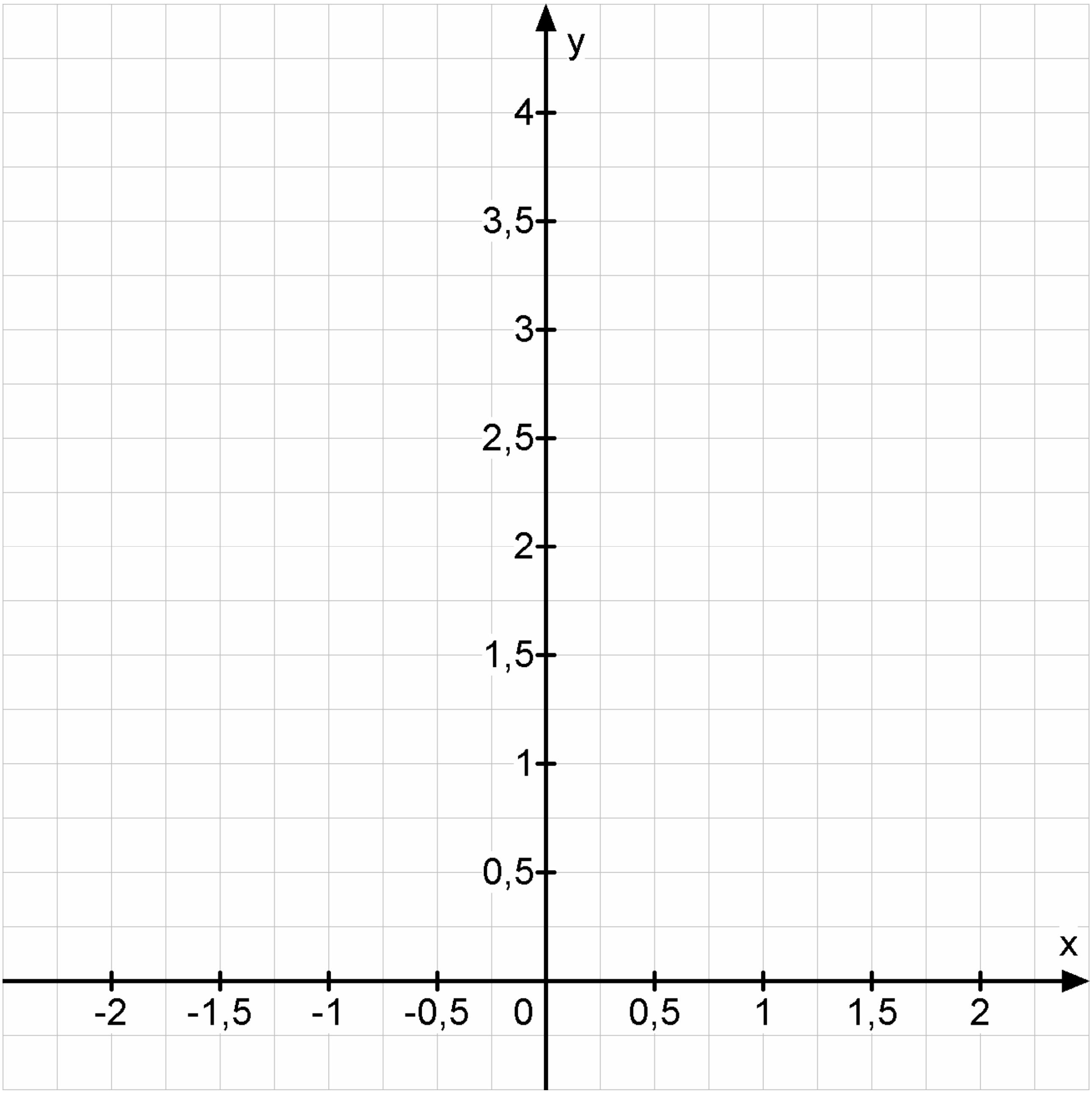
1.4 Bestimmen Sie die Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f. Geben Sie die Ergebnisse auf 3 Stellen nach dem Komma an. **/10**

1.5 Bestimmen Sie die Wende- bzw. Sattelpunkte des Graphen von f. Geben Sie die Ergebnisse auf 3 Stellen nach dem Komma an. **/7**

1.6 Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-2;2]$ unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte in das vorgegebene Koordinatensystem (siehe nächste Seite). **/4**

1.7 Im Punkt $P(-1\,|\,f(-1))$ hat der Graph der Funktion f die Normale (Senkrechte) n. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung, die diese Normale beschreibt und zeichnen Sie den Graphen von n mit in das Koordinatensystem von Aufgabe 1.6. Geben Sie die Ergebnisse auf 3 Stellen nach dem Komma an. **/8**

Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^3$; mit $x \in [-2; 2]$



2 Rekonstruktion /15

Rekonstruieren Sie die Funktion f dritten Grades, deren Graph im Punkt $P_1(2|2)$ einen lokalen Tiefpunkt und im Punkt $P_2(3|4)$ einen Wendepunkt besitzt.

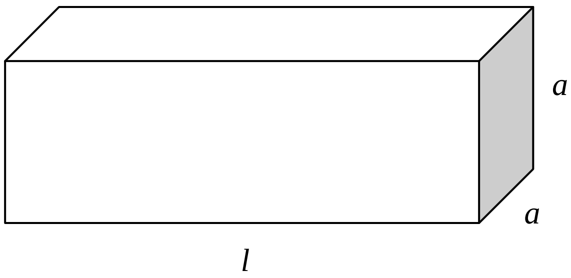
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von *f*, indem Sie aus den oben genannten Bedingungen ein Gleichungssystem aufstellen und damit die entsprechenden Koeffizienten bestimmen. Geben Sie die Funktionsgleichung an.

Sollten Sie die Bedingungen nicht oder nur unvollständig aufgestellt haben, lösen Sie das folgende Ersatzgleichungssystem:

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
\text{I:} & \frac{4}{3} & = & 9a & + & 3b & + & c & + & \frac{1}{3}d \\
\text{II:} & 1 & = & 4a & + & 2b & + & c & + & \frac{1}{2}d \\
\text{III:} & 0 & = & 24a & + & 8b & + & 2c & & \\
\text{IV:} & 0 & = & -6a & + & 2b & + & c & &
\end{array}
$$

3 Extremwertaufgabe /15

Eine Kartonagenfabrik stellt quaderförmige Pakete mit quadratischen Seitenflächen her. Hierbei darf keine Kante des Paketes kürzer als 20 cm sein. Damit die Pakete nicht zu unhandlich werden, soll folgende Bedingung erfüllt sein: Die Länge einer Vorderkante plus dem Umfang einer quadratischen Seitenfläche soll 3 m betragen.



3.1 Zeigen Sie, dass V eine Zielfunktion ist, die das Volumen der beschriebenen Pakete in Abhängigkeit von ihrer Vorderkantenlänge l (siehe Skizze) beschreibt und geben Sie den Definitionsbereich dieser Zielfunktion an. **/6**

Es gilt: $$V(l) = \frac{1}{16}l^3 - \frac{3}{8}l^2 + \frac{9}{16}l$$

3.2 Berechnen Sie die Abmessungen für das Paket mit dem größtmöglichen Volumen und geben Sie auch das maximale Volumen an. Untersuchen Sie, ob es sich bei dem errechneten Maximum um ein absolutes handelt. Tipp: Beachten Sie hierbei die Funktionswerte an den Rändern des Definitionsbereichs. **/9**

4 Integralrechnung /30

Gegeben ist die Funktion f mit:

$$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36\,;\, x \in \mathbb{R}\,.$$

4.1 Zeigen Sie, ohne jedoch in den Funktionsterm einzusetzen, dass $x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 2$ und $x_4 = 3$ Nullstellen der Funktion f sind und skizzieren Sie qualitativ den Graphen von f. **/7**

(Wählen Sie für die *x*-Achse 1 LE ≙ 1 cm und für die *y*-Achse 10 LE ≙ 1 cm)

4.2 Bestimmen Sie den Inhalt der vom Graphen von f und der *x*-Achse begrenzten Gesamtfläche. **/13**

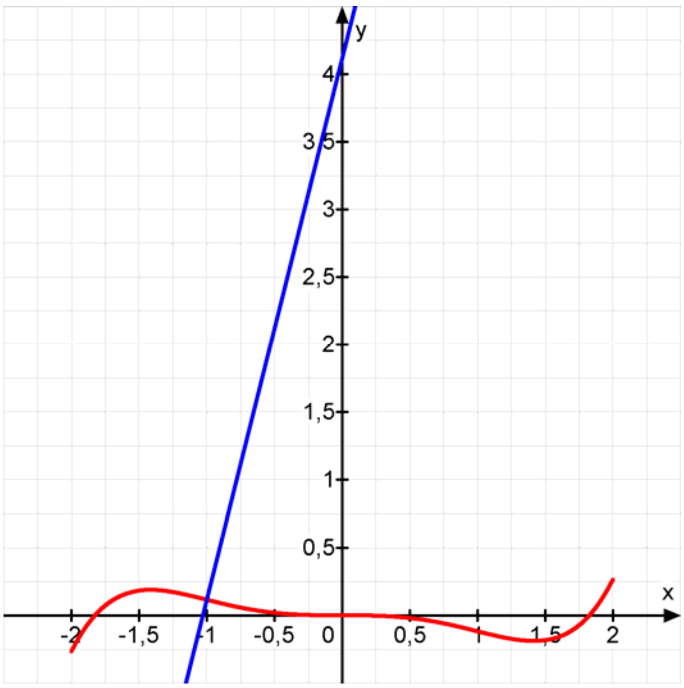
4.3 Bestimmen Sie für die Funktion g_a mit: **/10**

$$g_a(x) = -x^2 + ax\,;\, x \in \mathbb{R}$$

den Parameter $a > 0$ so, dass die vom Graphen von g_a und der *x*-Achse begrenzte Fläche den Flächeninhalt 4,5 FE hat.

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.1	Der höchste Exponent der Variablen im Funktionsterm von f ist 5. Da a_5 im Summand a_5x^5 positiv ist, verläuft der Graph von „minus unendlich“ nach „plus unendlich“ oder: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \to +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to -\infty$.		2	
1.2	Da $f(x) = -f(-x)$, bzw. alle Exponenten von x ungerade sind, ist der Funktionsgraph von f punktsymmetrisch zum Ursprung.		2	
1.3	Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0$			
	$\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^3 = 0$	1		
	$x^3(\frac{1}{20}x^2 - \frac{1}{6}) = 0$		1	
	$x_{N1/2/3} = 0$	1		
	$\frac{1}{20}x^2 - \frac{1}{6} = 0$			
	$x^2 = \frac{10}{3}$	1		
	$x_{N4} = \sqrt{\frac{10}{3}} \approx 1{,}826$	2		
	$x_{N5} = -\sqrt{\frac{10}{3}} \approx -1{,}826$			
	Schnittpunkte mit der x – Achse: $N_{1/2/3}(0\mid 0);\ N_4(\sqrt{\frac{10}{3}}\mid 0);\ N_5(-\sqrt{\frac{10}{3}}\mid 0)$			
	Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0$			
	$y = 0$	1		
	$P_y(0\mid 0)$			

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.4	Hoch- und Tiefpunkte:			
	$f'(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$			
	$f''(x)=x^3-x$		2	
	$\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2=0$			
	$x^2(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2})=0$			
	$x_{E1/2}=0$			
	$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}=0$			
	$x_{E3/4}=\pm\sqrt{2}$			
	$f''(0)=0\ (kein\ Extremum)$		4	
	$f''(x_{E3})=\sqrt{2}>0\ (lok.\ Minimum)$			
	$f''(x_{E4})=-\sqrt{2}<0\ (lok.\ Maximum)$			
	$f(x_{E3})\approx -0{,}189$	2		
	$f(x_{E4})\approx 0{,}189$			
	$T(\sqrt{2}\,\vert\,-0{,}189)$	2		
	$H(-\sqrt{2}\,\vert\,0{,}189)$			
1.5	Wende- bzw. Sattelpunkte:			
	$f''(x)=x^3-x=x(x^2-1)$		1	
	$x_{W1}=0$	1		
	$x_{W2/3}=\pm 1$	1		
	$f'(0)=0;\ f'''(0)=-1\neq 0$			
	$W_1(0\,\vert\,0)\ Sattelpunkt$	1		
	$f'(1)=-\frac{1}{4};\ f'''(1)=2\neq 0$		1	
	$W_2(1\,\vert\,-0{,}11\overline{6})\ Wendepunkt$	1		
	$f'(-1)=-\frac{1}{4};\ f'''(-1)=2\neq 0$			
	$W_3(-1\,\vert\,0{,}11\overline{6})\ Wendepunkt$	1		

Teil- auf- gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.6	Graph der Funktion f:  		4	
1.7	$f'(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$	1		
	$f'(-1)=\frac{1}{4}(-1)^4-\frac{1}{2}(-1)^2$			
	$=-\frac{1}{4}=m$	1		
	$m_N=-\frac{1}{m}=4$			1
	$y=4\cdot x+b$	1		
	$b=y-4\cdot x=0{,}11\overline{6}-4\cdot(-1)=4{,}11\overline{6}$		2	
	$y_N=4\cdot x+4{,}11\overline{6}$ $(Normalengleichung)$			
	Graph der Normalen siehe 1.6		2	
	Summe	18	21	1
	mögliche BE		40	

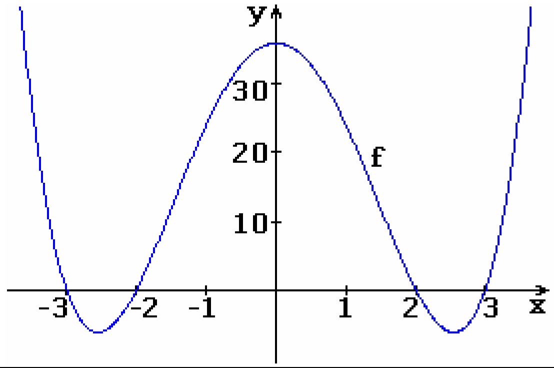
Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
2	Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$	3		
	Bedingungsgefüge: 1. $f(2) = 2$ ($P_1(2\|2)$ liegt auf *G(f)*) 2. $f(3) = 4$ ($P_2(3\|4)$ liegt auf *G(f)*) 3. $f'(2) = 0$ ($x_E = 2$ ist Extremstelle) 4. $f''(3) = 0$ ($x_W = 3$ ist Wendestelle) Gleichungssystem: I: 2 = 8a + 4b + 2c + d II: 4 = 27a + 9b + 3c + d III: 0 = 12a + 4b + c IV: 0 = 18a + 2b		4	
	Lösen des Gleichungssystems (ebenso Ersatz-LGS)		5	
	Daraus ergibt sich (auch Ersatz-LGS): $a = -1, \quad b = 9, \quad c = -24, \quad d = 22$	2		
	und für die Funktionsgleichung: $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 22$	1		
	Summe	6	9	0
	mögliche BE	15		

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
3.1	Erstellung der Zielfunktion $V(a,l)=a^2\cdot l$ als Hauptbedingung	1		
	$4a+l=3$ als Nebenbedingung			1
	$\Rightarrow a=\frac{1}{4}(3-l)$	1		
	Es folgt: $V(l)=(\frac{1}{4}(3-l))^2\cdot l$ $=\frac{1}{16}(9-6l+l^2)\cdot l$ $=\frac{1}{16}l^3-\frac{3}{8}l^2+\frac{9}{16}l$		2	
	Definitionsbereich $D_V=\{\ l\in\mathbb{R}\,\vert\,0,2\le l\le 2,2\}$, denn nur für diese Kantenlängen ist die Handlichkeit der Pakete – also $4a+l=3$ gewährleistet.			1
3.2	zu 1.b) Berechnung der Abmessungen $V(l)=\frac{1}{16}l^3-\frac{3}{8}l^2+\frac{9}{16}l$ $V'(l)=\frac{3}{16}l^2-\frac{3}{4}l+\frac{9}{16}$ $V''(l)=\frac{3}{8}l-\frac{3}{4}$	2		
	$V'(l)=0$ und $V''(l)\neq 0$ ist hinreichend für Extremstellen $\frac{3}{16}l^2-\frac{3}{4}l+\frac{9}{16}=0\ \vert\cdot(\frac{16}{3})$ $l^2-4l+3=0\ \vert$pqF $l_{1/2}=2\mp\sqrt{(2)^2-3}$ $=2\mp 1$ also $l_1=1$ und $l_2=3$ sind Extremstellenkandidaten von V, da sie Nullstellen von V' sind.			

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-auf-gaben</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Wegen $V''(1) = \frac{3}{8} \cdot 1 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{8} < 0$ ist $l_H = 1$ Hochstelle von V
und $V''(3)$ entfällt, da $3 \notin D_f$

$a_H = \frac{1}{4}(3 - l_H) = \frac{1}{4}(3-1) = \frac{1}{2}$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$V(a_H, l_H) = a_H{}^2 \cdot l_H = (\frac{1}{2})^2 \cdot 1 = \frac{1}{4}$</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$V(0) = \frac{1}{16} \cdot 0^3 - \frac{3}{8} \cdot 0^2 + \frac{9}{16} \cdot 0 = 0$

$V(3) = \frac{1}{16} \cdot 3^3 - \frac{3}{8} \cdot 3^2 + \frac{9}{16} \cdot 3 = \frac{27 - 54 + 27}{16} = 0$
Ein maximales Volumen von $\frac{1}{4} m^3$ ergibt sich, wenn man die Abmessungen $\frac{1}{2} m \times \frac{1}{2} m \times 1 m$ für das Paket wählt.
Aufgrund der Randwerte von V ist das Maximum ein absolutes.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>4</td><td>9</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>mögliche BE</td><td colspan="3">15</td></tr>
</table>

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4				
4.1	setze $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ Substitution: $z = x^2$: $z^2 - 13z + 36 = 0$ $z_{1,2} = 6{,}5 \pm \sqrt{42{,}25 - 36} = 6{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = 6{,}5 \pm 2{,}5$ $z_1 = 6{,}5 + 2{,}5 = 9 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 3$ $z_2 = 6{,}5 - 2{,}5 = 4 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_{3,4} = \pm 2$	3		
			4	
4.2	Symmetrie des Graphen von f zur y-Achse $\Rightarrow$ $A = 2\left\lvert \int_0^2 f(x)dx \right\rvert + 2\left\lvert \int_2^3 f(x)dx \right\rvert$	4		
	$= 2 \cdot \left\lvert \frac{1}{5}x^5 - \frac{13}{3}x^3 + 36x \right\rvert_0^2 + 2 \cdot \left\lvert \frac{1}{5}x^5 - \frac{13}{3}x^3 + 36x \right\rvert_2^3$ $= 2 \cdot \lvert 6{,}4 - 34{,}\overline{6} + 72 \rvert +$		2	
	$+ 2 \cdot \lvert (48{,}6 - 117 + 108) - (6{,}4 - 34{,}\overline{6} + 72) \rvert$		3	
	$= 2 \cdot \lvert 43{,}7\overline{3} \rvert + 2 \cdot \lvert (-4{,}1\overline{3}) \rvert = 87{,}4\overline{6} + 8{,}2\overline{6} = \underline{\underline{95{,}7\overline{3}FE}}$	4		
4.3	Nullstellen von g_a bestimmen: setze $g_a(x) = -x^2 + ax = x(-x + a) = 0$ $\underline{x_1 = 0}$ oder $-x + a = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_2 = a}$		3	
	$\left\lvert \int_0^a (-x^2 + ax)dx \right\rvert = \left\lvert \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right\rvert_0^a =$ $= \left\lvert -\frac{1}{3}a^3 + \frac{a}{2}a^2 \right\rvert = \frac{1}{6}a^3$ setze $\frac{1}{6}a^3 = 4{,}5 \quad \Rightarrow \quad a^3 = 27 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = 3}}$		3	4
	Summe	11	15	4
	mögliche BE		30	