

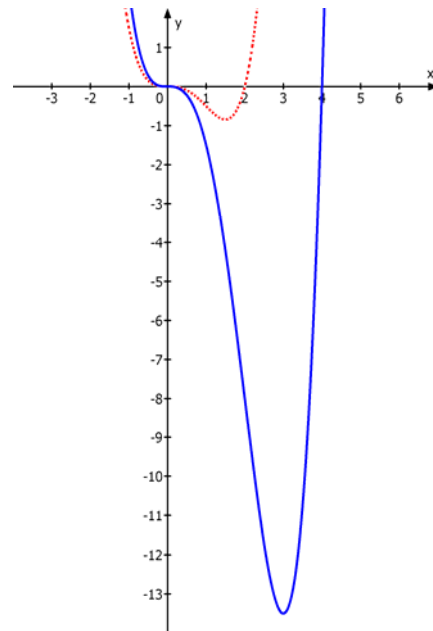
1 Kurvenuntersuchung

/40

Gegeben sind zwei ganzrationale Funktionen f und g (siehe Graphik) mit den Funktionsgleichungen:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$$

mit $x \in \mathbb{R}$.



- 1.1** Geben Sie an, welcher Graph zu welcher Funktion gehört und begründen Sie Ihre Aussage. **/4**
- 1.2** Berechnen Sie den Tiefpunkt des Graphen von g . **/10**
- 1.3** Berechnen Sie die Wendepunkte des Graphen von g . **/8**
- 1.4** Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten, die in den Punkten $P_1(0 | g(0))$ und $P_2(2 | g(2))$ den Graphen von g berühren. **/6**
- 1.5** Bestimmen Sie den Flächeninhalt, der von den beiden Graphen und der x -Achse eingeschlossen wird. **/6**
- 1.6** Die Tiefpunkte $T_f(\frac{3}{2} | f(\frac{3}{2}))$ und $T_g(3 | g(3))$ und der Punkt $P(2 | -\frac{8}{3})$ liegen auf einem Graphen einer ganzrationalen Funktion k . Entscheiden Sie, welche der beiden folgenden Aussagen wahr ist: **/6**
- a. k ist eine lineare Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form $k(x) = mx + n$; $m, n \in \mathbb{R}$.
 - b. k ist eine ganzrationale Funktion mit einer Funktionsgleichung $k(x) = ax^4$; $a \in \mathbb{R}$.

Begründen Sie Ihre Entscheidung und bestimmen Sie die Funktionsgleichung von k .

2 Rekonstruktion

/15

Der Graph einer Funktion dritten Grades berührt im Punkt $N(4|0)$ die x -Achse, und im Punkt $P(2|f(2))$ hat die zugehörige Tangente die Funktionsgleichung $g(x) = -2x + 8$.

2.1 Stellen Sie mit den oben genannten Bedingungen das Bedingungsgefüge zusammen und stellen Sie daraus ein Gleichungssystem auf. /7

2.2 Bestimmen Sie die Koeffizienten von f , indem Sie das Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl lösen. /7

Sollten Sie unter 2.1 die Bedingungen nicht oder nur unvollständig aufgestellt haben, lösen Sie das folgende Ersatzgleichungssystem:

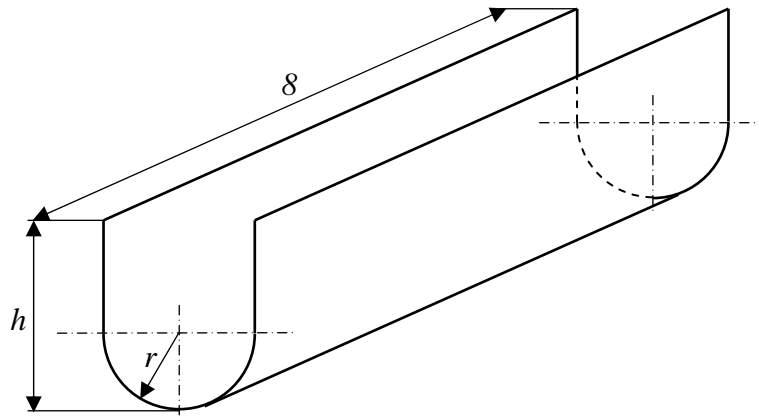
$$\begin{array}{l} \text{I:} \quad 2 = 36a + 10b + 3c + d \\ \text{II:} \quad 10 = 20a + 8b + 4c + d \\ \text{III:} \quad -1 = 30a + 6b + c \\ \text{IV:} \quad -4 = 24a + 8b + 2c \end{array}$$

2.3 Stellen Sie die Funktionsgleichung von f auf, indem Sie die berechneten Koeffizienten in Ihren Ansatz einsetzen. /1

3 Extremwertaufgabe

/15

Aus einer Blechtafel ($2\text{m} \times 8\text{m} \times 1,5\text{mm}$) soll durch Biegen eine 8m lange nach oben offene Rinne gefertigt werden. Die Fläche des Querschnitts soll hierbei aus einem Halbkreis und einem Rechteck zusammengesetzt sein.



Rechnen Sie ohne Einheiten

- 3.1 Zeigen Sie, dass V eine (Ziel)Funktion ist, mit der die Rauminhalte der Rinnen in Abhängigkeit vom Radius des jeweilig gewählten Halbkreises berechnet werden können. Es gilt: /7

$$V(r) = 16r - 4\pi r^2 \quad \text{mit} \quad D_V = \left\{ r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq \frac{2}{\pi} \right\}$$

1 Längeneinheit $\hat{=}$ 1 m bzw. 1 Volumeneinheit $\hat{=}$ 1 m³

- 3.2 Ermitteln Sie, welche Abmessungen zu wählen sind, damit die Rinne möglichst viel Flüssigkeit aufnehmen kann. /6
Beschreiben Sie, wie die Rinne in diesem Fall aussieht.

- 3.3 Erläutern Sie, warum $D_V = \left\{ r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq \frac{2}{\pi} \right\}$ der Definitionsbereich der (Ziel)Funktion V ist. /2

4 Integralrechnung

/30

Gegeben sind die reell definierten Funktionen f und g durch ihre Funktionsgleichungen

$$f(x) = 2x^3 \text{ und } g(x) = 3x^2 - 1$$

- 4.1** Weisen Sie nach, dass beide Funktionen außer dem Berührungspunkt $P_1(1|2)$ nur noch einen Schnittpunkt haben, nämlich $P_2(-\frac{1}{2} | -\frac{1}{4})$. **/7**

- 4.2.** Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/7**

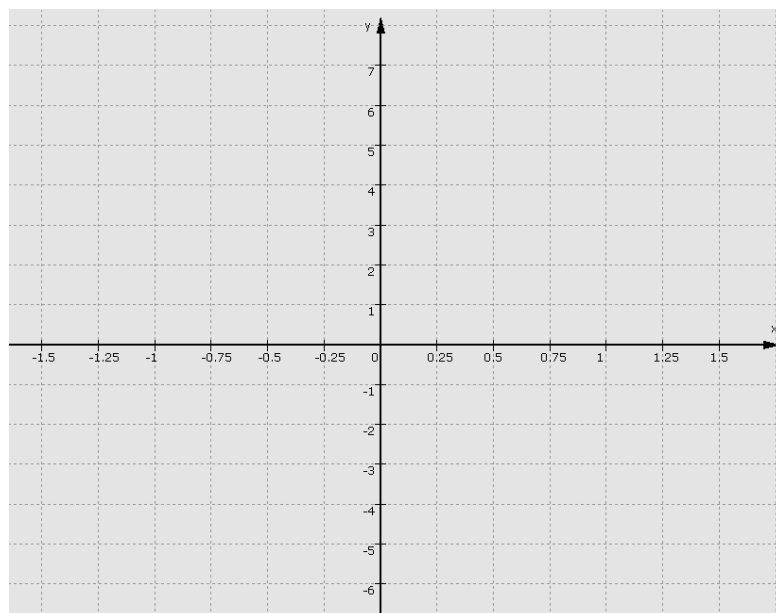
x	- 1,5	- 1	- 0,5	0	0,5	1	1,5
$f(x)$							
$g(x)$							

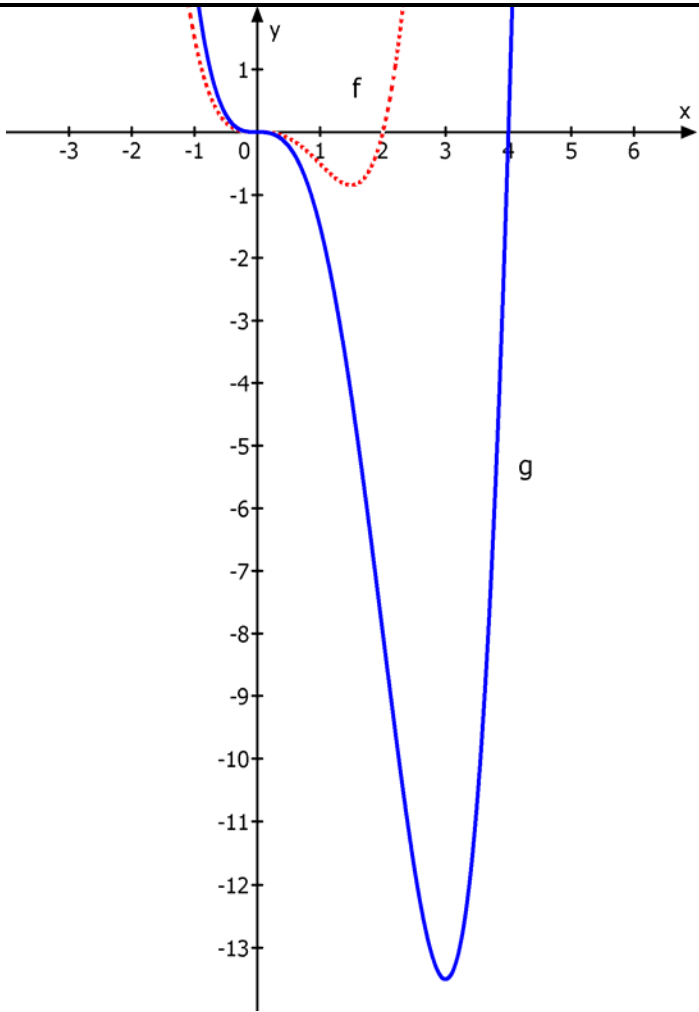
Zeichnen Sie die Graphen beider Funktionen f und g in einem Koordinatensystem im Intervall $[-1,5; 1,5]$. Nutzen Sie das Koordinatensystem am Ende der Aufgabenstellung.

- 4.3.** Beide Funktionsgraphen schließen eine Fläche A_1 ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche A_1 **/5**

- 4.4.** Die Funktionsgraphen und die Gerade $y = 2$ schließen die Fläche A_2 ein. **/11**

Skizzieren Sie die Fläche A_2 in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie deren Inhalt.



Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.1	 <p style="margin-top: 10px;">Eine von mehreren Begründungen: Die Stelle 2 ist Nullstelle von f.</p>	4		
1.2	<p>Bestimmung des Tiefpunktes:</p> $g'(x) = 2x^3 - 6x^2$ $g''(x) = 6x^2 - 12x$ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 = 0$ <p>$x = 0$; keine Extremstelle, mögliche Begründung durch Einsetzen $x = 3$; $g''(3) > 0$; $g(3) = -13,5 \Rightarrow T(3 -13,5)$ ist Tiefpunkt</p>		1 1 3 1 2 2	

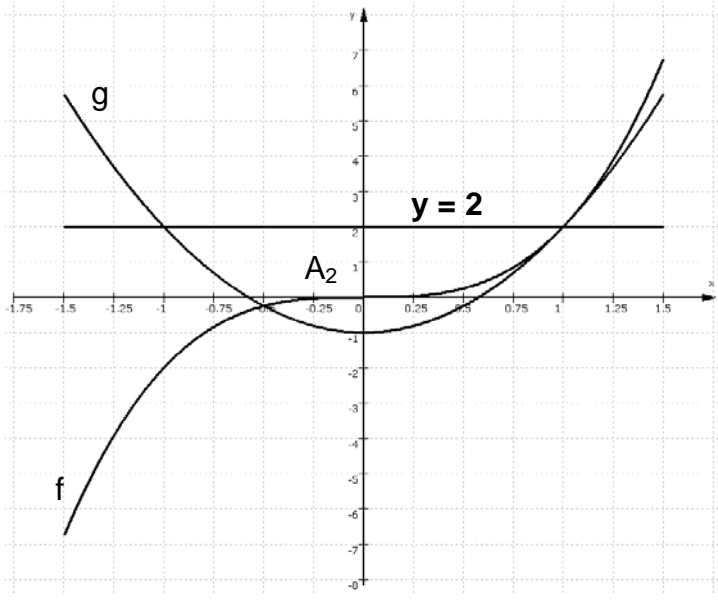
Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.3	$g''(x) = 6x^2 - 12x$ $g'''(x) = 12x - 12$ $g''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x = 0$ $x_{W_1} = 0$; $g'''(0) \neq 0$; $g(0) = 0 \Rightarrow W_1(0 0)$ ist Wendepunkt $x_{W_2} = 2$; $g'''(2) \neq 0$; $g(2) = -8 \Rightarrow W_2(2 -8)$ ist Wendepunkt Überprüfung auf Sattelpunkt wird nicht gefordert.		1 1 2 2 2	
1.4	Bestimmung der Gleichungen der Wendetangenten: Die Wendetangente in $W_1(0 0)$ ist die x -Achse, da die Kurvensteigung in W_1 gleich Null ist (also Sattelpunkt). Sie hat die Gleichung $t_1(x) = 0$ oder $y = 0$. Die Tangente in W_2 geht durch den Punkt $(2 -8)$ und hat die Steigung $g'(2) = 16 - 24 = -8$. Sie hat also die Gleichung $t_2(x) = -8x + 8$ oder $y = -8x + 8$.		3 3	
1.5	$A = \left \int_0^4 g(x) dx \right - \left \int_0^2 f(x) dx \right $ $= \left \left[\frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{2} x^4 \right]_0^4 \right - \left \left[\frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 \right $ $= 102,4 - 128 - 0 - 3,2 - 4 - 0 $ $= 24,8 FE$		2 2 2	
1.6	<u>Aussage a.</u> k ist keine lineare Funktion. Dieser Sachverhalt kann aus der Skizze entnommen werden. Ein rechnerischer Nachweis ist möglich, wird aber nicht verlangt. <u>Aussage b.</u> Bestimmung von a für den Fall, dass $P \in k$ $k(x) = ax^4$; $k(2) = -\frac{8}{3} \Rightarrow 16a = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}$.		1	2

Teil- auf- gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
	<p>Prüfen, ob:</p> $T_f \in k : -\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = -\frac{81}{96} = -\frac{27}{32} \Rightarrow T_f \in k$ $T_g \in k : -\frac{1}{6} \cdot 3^4 = -\frac{81}{6} = -\frac{27}{2} \Rightarrow T_g \in k$ <p>Die Aussage b ist wahr. Die gesuchte Funktion k hat die Funktionsgleichung: $k(x) = -\frac{1}{6}x^4$.</p>			3
	Summe	4	31	5
	mögliche BE	40		

Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.1	<p>Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$</p> <p>Bedingungsgefüge: 1. $f(4) = 0$ ($x_N = 4$ ist Nullstelle) 2. $f'(4) = 0$ ($x_E = 4$ ist Extremstelle) 3. $f(2) = g(2) = -2 \cdot (2) + 8 = 4$ ($P(2 f(2))$ ist gemeinsamer Punkt von g und f) 4. $f'(2) = -2$ (g ist Tangente an den Graphen von f bei $x = 2$)</p>	1 1	 1 2 1	 1
2.2	<p>Gleichungssystem:</p> <p style="margin-left: 40px;">I: $0 = 64a + 16b + 4c + d$ II: $4 = 8a + 4b + 2c + d$ III: $0 = 48a + 8b + c$ IV: $-2 = 12a + 4b + c$</p> <p>Lösen des Gleichungssystems (ebenso Ersatz-LGS)</p> <p>Daraus ergibt sich (auch Ersatz-LGS): $a = \frac{1}{2}, b = -4, c = 8, d = 0$</p>	 2	 5	
2.3	<p>Für den Funktionsterm gilt: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$</p>	1		
	Summe	5	9	1
	mögliche BE	15		

Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
3.1	<p>Erstellung der Zielfunktion</p> $A(r, h) = 2r \cdot (h - r) + \frac{1}{2} \pi \cdot r^2 \quad \text{als Hauptbedingung}$ $2 = 2 \cdot (h - r) + \frac{1}{2} \pi \cdot 2r \quad \text{als Nebenbedingung}$ $= 2h - 2r + \pi r$ $= 2h + (\pi - 2)r$ <p>Es folgt:</p> $2h = 2 - (\pi - 2)r$ $h = 1 - \frac{1}{2} \pi r + r$ <p>Eingesetzt in die Hauptbedingung:</p> $A(r) = 2r \cdot (1 - \frac{1}{2} \pi r + r - r) + \frac{1}{2} \pi \cdot r^2$ $= 2r \cdot (1 - \frac{1}{2} \pi r) + \frac{1}{2} \pi \cdot r^2$ $= 2r - \pi r^2 + \frac{1}{2} \pi r^2$ $= 2r - \frac{1}{2} \pi r^2$ $V(r) = 8 \cdot A(r)$ $V(r) = 16r - 4\pi r^2$		1	2
3.2	<p>Berechnung der Abmessungen:</p> $V(r) = 16r - 4\pi r^2, \quad V'(r) = 16 - 8\pi r, \quad V''(r) = -8\pi$ <p>$V'(r) = 0$ und $V''(r) \neq 0$ ist hinreichend für Extremstellen</p> $16 - 8\pi r = 0 \quad +8\pi r$ $\pi r = 2 \quad \div \pi$ $r_1 = \frac{2}{\pi} \in D_V$ $\approx 0,64 \quad \text{ist Extremstellenkandidat.}$ <p>Mit $V''(\frac{2}{\pi}) = -8\pi$ < 0 folgt, dass $r_H = \frac{2}{\pi}$ Hochstelle von V ist.</p> <p>Einsetzen von r_H in die nach h umgestellte Nebenbedingung:</p> $h_H = 1 - \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}$ $= \frac{2}{\pi}$ $\approx 0,64$ <p>Damit die Rinne maximal viel Flüssigkeit aufnehmen</p>	1	1	1

Teil- auf- gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
	<p>kann, muss die Fläche des Querschnitts ausschließlich aus einem Halbkreis bestehen.</p> <p>Wegen 1 Einheit entspricht 1 m, ist als Radius ein Wert von ca. 0,64 m zu wählen.</p>			1
3.3	<p>$D_V = \left\{ r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq \frac{2}{\pi} \right\}$ ist der Definitionsbereich.</p> <p>Ist der Radius $r=0$, dann ist die Höhe 1m, das Blech wird nur in der Mitte um 180° gebogen – der Flächeninhalt ist dann Null.</p> <p>Aufgrund der Bemaßung muss die Höhe mindesten so groß sein wie der Radius. In diesem Fall (also $h=r$) ergibt sich aus Formel für die Nebenbedingung $r = \frac{2}{\pi}$</p>		1	1
	Summe	4	7	4
	mögliche BE	15		

Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB																										
		I	II	III																								
4.1	<p>Die Gleichungen gleichsetzen und Polynomdivision des Termes $(2x^3 - 3x^2 + 1)$ durch $(x - 1)$ liefert</p> <p>$2x^2 - x - 1 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -\frac{1}{2}$.</p> <p>Damit ist $x_1 = 1$ Doppellösung, also ist $B(1/2)$ Berührungspunkt und $x_2 = -\frac{1}{2}$ liefert den Schnittpunkt</p> <p>$S(-\frac{1}{2} / -\frac{1}{4})$.</p>		7																									
4.2	<table border="1" style="margin-bottom: 10px; width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> <th>g(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>-1,5</td><td>-6,75</td><td>5,75</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>2</td></tr> <tr><td>-0,5</td><td>-0,25</td><td>-0,25</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>-1</td></tr> <tr><td>0,5</td><td>0,25</td><td>-0,25</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1,5</td><td>6,25</td><td>5,75</td></tr> </tbody> </table> 	x	f(x)	g(x)	-1,5	-6,75	5,75	-1	-2	2	-0,5	-0,25	-0,25	0	0	-1	0,5	0,25	-0,25	1	2	2	1,5	6,25	5,75	3	4	
x	f(x)	g(x)																										
-1,5	-6,75	5,75																										
-1	-2	2																										
-0,5	-0,25	-0,25																										
0	0	-1																										
0,5	0,25	-0,25																										
1	2	2																										
1,5	6,25	5,75																										
4.3	$A_1 = \int_{-0,5}^1 (2x^3 - 3x^2 + 1) dx$ $A_1 = [0,5 x^4 - x^3 + x]_{-0,5}^1 = \frac{27}{32} \text{ FE}$	3	2																									

Teil- auf- gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
4.4	<p>Skizze siehe 4.2</p> $A_2 = \int_{-1}^{-0,5} (2 - (3x^2 - 1)) dx + \int_{-0,5}^1 (2 - 2x^3) dx$ $A_2 = \left[3x - x^3 \right]_{-1}^{-0,5} + \left[2x - 0,5 x^4 \right]_{-0,5}^1$ $A_2 = \frac{5}{8} \text{ FE} + \frac{81}{32} \text{ FE} = \frac{101}{32} \text{ FE} = 3 \frac{5}{32} \text{ FE}$		2	3
		3	3	
	Summe	9	18	3
	mögliche BE	30		