Abschlussprüfung
an der Fachoberschule im Schuljahr 2008 / 2009

Fach	**Mathematik (A)**
Name, Vorname	
Klasse	
Prüfungstag	29. April 2009
Prüfungszeit	09:00 - 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Mathematische Formelsammlungen (keine selbst angefertigten) ohne Musterlösungen, Taschenrechner ohne Graphikdisplay, frei programmierbare Speicher müssen gelöscht sein. Bleistifte dürfen nur für Skizzen benutzt werden.
Allgemeine Arbeitshinweise	Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen. Für jede neue Aufgabe ist ein neuer gekennzeichneter Bogen zu beginnen. Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem **Abzug** von bis zu **einem Punkt** (Malus-Regelung). **Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!**
Spezielle Arbeitshinweise	Der Aufgabensatz besteht aus vier verschiedenen Einzelaufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen!

Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter (Reinschrift): ______ ***Blätter***

Bewertungseinheiten, und Gesamtpunkte und Gesamtnote[1]:

Aufgabe Nr.:	Soll %	Ist	Ist (ggf. Zweitkorrektur)
1	40		
2	15		
3	15		
4	30		
Summe:	100		
Notenpunkte:	15	____ Punkte	____ Punkte
Maluspunkt	-1	____ Punkt	____ Punkt
Insgesamt:		_____ Punkte Note:_____	_____ Punkte Note:_____
Datum, Unterschrift:			

[1] gilt nur für doppelt qualifizierende Bildungsgänge mit Fachhochschulreife

1 Kurvendiskussion /40

Gegeben sei die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 0,5x^3 - 1,5x^2 - 3x + 4$; $x \in \mathbb{R}$.

1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f und begründen Sie Ihre Aussage. **/2**

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen. **/2**

1.3 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. **/6**

1.4 Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen von f mit der y-Achse. **/1**

1.5 Bestimmen Sie die Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von f. **/15**

1.6 Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-2,5 \mid 4,5]$ unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte. **/5**

1.7 An der Stelle $x = -1$ habe der Graph der Funktion f die Normale n. Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung dieser Normale und zeichnen Sie den Graphen von n mit in das Koordinatensystem von Aufgabe 1.6. **/5**

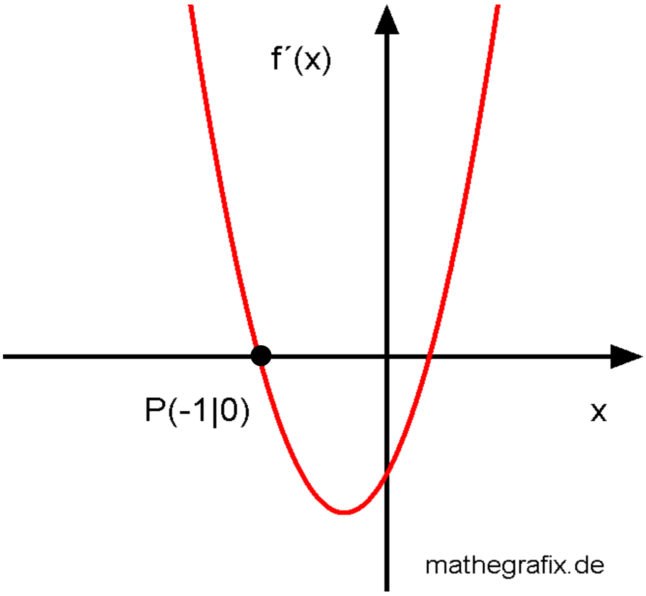
1.8 Verschiebt man den Graphen der Funktion f um zwei Längeneinheiten in Richtung Ordinatenachse, erhält man die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 0,5x^3 - 1,5x^2 - 3x + 6$; $x \in \mathbb{R}$. **/4**

Eine Nullstelle der Funktion g liegt im Intervall $[3 \mid 4]$. Berechnen Sie diese Nullstelle durch ein geeignetes Näherungsverfahren. Brechen Sie die Berechnung nach drei Iterationsschritten ab. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

2 Rekonstruktion von Funktionen **/15**

In der nebenstehenden Zeichnung ist der Graph der <u>ersten Ableitung</u> f' einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades dargestellt. Wie aus der Grafik zu ersehen ist, verläuft der Graph von f' durch den Punkt $P(-1|0)$.

Der durch den Koordinatenursprung verlaufende Graph der zugehörigen Funktion f hat im Punkt $W(-\frac{1}{3}|f(-\frac{1}{3}))$ einen Wendepunkt und geht durch den Punkt $Q(-2|-2)$.



Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f durch Lösen des entsprechenden Gleichungssystems.

Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie <u>ersatzweise</u> das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktion.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
6a & - & 4b & + & 2c & & & = & 0 \\
6a & - & 6b & + & 2c & & & = & -2 \\
-8a & + & 8b & - & 2c & + & d & = & 2 \\
 & & & & 3c & + & d & = & -3
\end{array}
$$

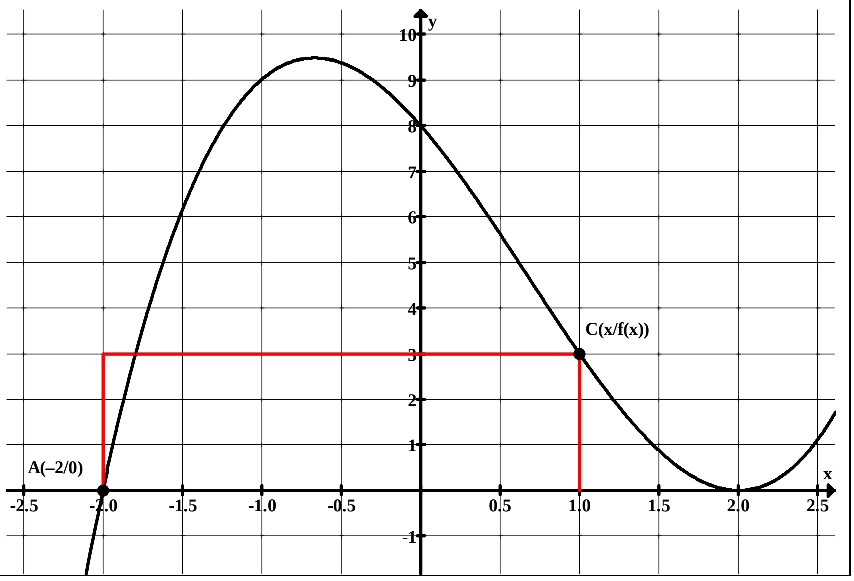
3 Extremwertaufgabe **/15**

Gegeben ist der Graph der Funktion f mit

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$, $x \in \mathbb{R}$

und ein achsenparalleles Rechteck mit den Eckpunkten

A(-2|0) und C(x|f(x)).



3.1 Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks für x = 1 (siehe Zeichnung). **/1**

3.2 Bewegt sich der Punkt C auf dem Graphen von f, so ändert sich der Flächeninhalt des Rechtecks. **/3**
Zeichnen Sie für x = 0,5 das Rechteck in das gegebene Koordinatensystem ein und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Rechtecks.

3.3 Weisen Sie nach, dass die Funktionsgleichung der Funktion A, die den Flächeninhalt des Rechtecks in Abhängigkeit von x beschreibt, $A(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ lautet. **/2**

3.4 Für welches x aus dem Intervall von –2 bis +2 nimmt das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt an? **/9**

Wie groß ist dieser maximale Flächeninhalt?

4 Integralaufgabe /30

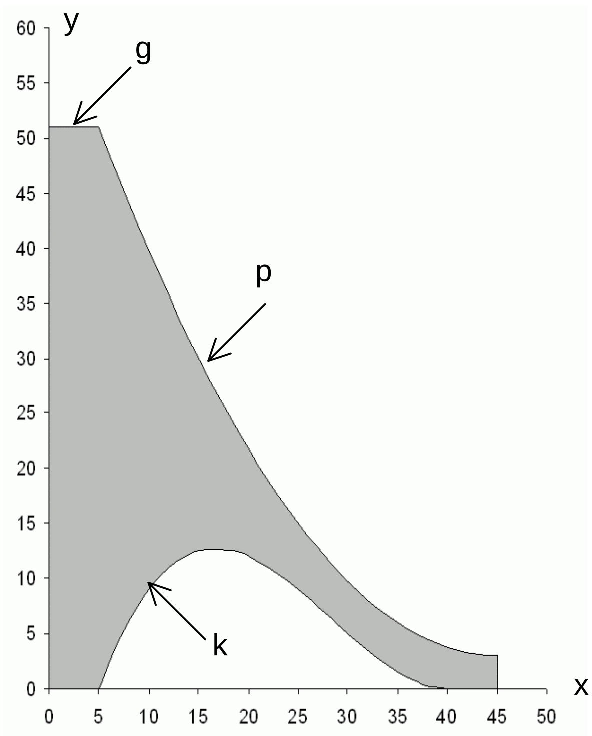
In der Abbildung nebenan ist die Seitenansicht einer Skisprungschanze dargestellt (Längenangaben in Metern).

Der **obere Rand** ist **im Intervall [0 | 5]** gegeben durch ***g(x)* = 51**

und **im Intervall [5 | 45]** durch eine Parabel p mit der Funktionsgleichung

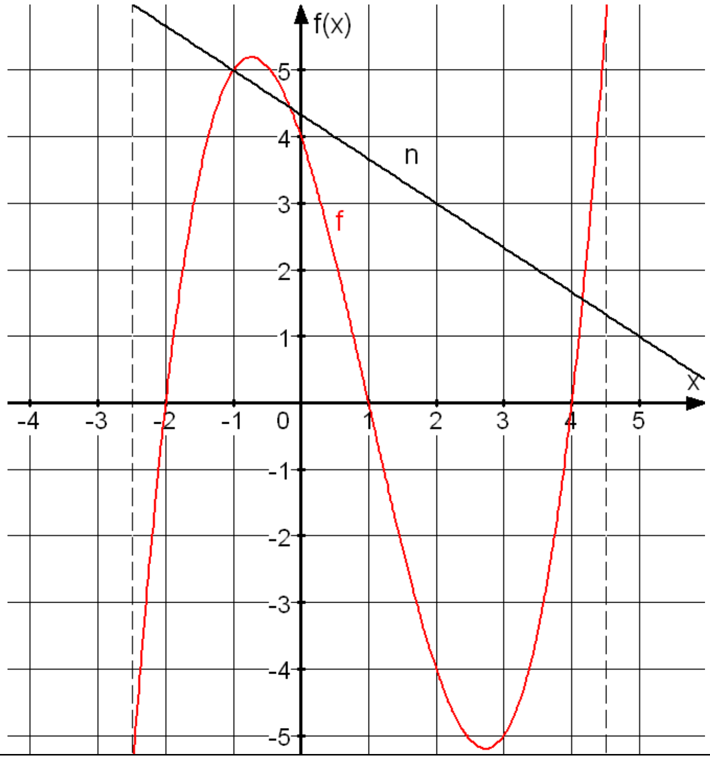
$$p(x) = 0{,}03\,x^2 - 2{,}7\,x + 63{,}75.$$

Nach **unten** ist die Sprungschanze **im Intervall [5 | 40]** durch den Graphen der Funktion k mit der Funktionsgleichung
$k(x) = 0{,}002(x - 5)(x - 40)^2$ begrenzt, **ansonsten durch die x-Achse**.



Die beiden Seitenflächen der Sprungschanze sollen einen neuen Anstrich mit einem Speziallack bekommen. Wie viele Eimer Lackfarbe benötigt man dazu, wenn der Inhalt eines Eimers für 30 m² ausreicht? /30

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
1.1	$f(x) \neq f(-x)$, $f(-x) \neq -f(x)$ oder Die Exponenten von *x* sind gerade und ungerade, der Graph ist weder achsensymmetrisch zur *y*-Achse noch punksymmetrisch zum Ursprung.		2			
1.2	Der höchste Exponent der Variablen im Funktionsterm von f ist 3. Da a_3 im Summand a_3x^3 positiv ist, verläuft der Graph von „minus unendlich“ nach „plus unendlich“ oder: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.		2			
1.3	$f(x)=0$ Erste Lösung $x_{N1}=1$ durch Probieren Polynomdivision, p-q-Formel Nullstellen: $(0,5x^3-1,5x^2-3x+4):(x-1)=0,5x^2-x-4$ $x^2-2x-8=0$ $x_{N2}=4$; $x_{N3}=-2$	1 1 2	2			
1.4	$f(0)=4; S_y(0\|4)$	1				
1.5	Extrempunkte, notw. und hinr. Bedingung $f'(x)=1,5x^2-3x-3$ $f''(x)=3x-3$ $f'(x)=0$ $1,5x^2-3x-3=0$ $x^2-2x-2=0$ $x_{E1/2}=1\pm\sqrt{3}$ $x_{E1}=2,73$; $x_{E2}=-0,73$ $f''(2,73)=5,19>0 \Rightarrow Minimum; f(2,73)=-5,20$ $f''(-0,73)=-5,19<0 \Rightarrow Maximum; f(-0,73)=5,2$ $P_T(2,73\|-5,20)$ $P_H(-0,73\|5,20)$	2 1	4 2			

	Wendepunkte, notw. und hinr. Bedingung $f''(x)=3x-3$; $f'''(x)=3$ $f''(x)=0$; $3x-3=0$ $x_w=1$ $f'''(x_w)=3>0 \Rightarrow$ Rechts-Links-Wendepunkt $f(1)=0$; $P_W(1\|0)$	2 1	2 1			
1.6	$x_{N1}=1$; $x_{N2}=4$; $x_{N3}=-2$; $P_T(2,73\|-4,28)$; $P_H(-0,73\|5,20)$; $P_W(1\|0)$ $f(-2,5)=-5,69$; $P_L(-2,5\|-5,69)$; $f(4,5)=5,69$; $P_R(4,5\|5,69)$  	3	2			
1.7	$f(-1)=5 \Rightarrow P(-1\|5)$ ein Punkt der Normale n $f'(-1)=\frac{3}{2}$ Anstieg der Tangente in P $m_t * m_n=-1 \Rightarrow m_n=-\frac{2}{3}$ Anstieg der Normale in P $n(x)=m_n x+n_n$ mit $P(-1\|5)$ Normalengleichung $5=-\frac{2}{3}*(-1)+n_n \Rightarrow n_n=\frac{13}{3}$ absolutes Glied $n(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$ Normalengleichung	1	1 1	1 1		

		I	II	III		
1.8	Newtonsches Näherungsverfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$					
	$g(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 - 3x + 6$	1				
	$g'(x) = 1{,}5x^2 - 3x - 3$					
	Tabellen (siehe unten)		1	1		
	Es kann auch ein anderes Näherungsverfahren, z.B. regula falsi, genutzt werden					
	Interpretation: Nullstelle nicht exakt ermittelt, der Funktionswert weicht an der Stelle ... um ... von Null ab. Durch weitere Iterationsschritte kann man sich der Nullstelle beliebig genau nähern.			1		
	Summe	16	20	4		
	mögliche BE		40		erreichte BE	

xs - erste Näherung **3**

	xn	f(xn)	f'(xn)
xs	3	-3	1,5
x1	5	16	19,5
x2	4,17948718	3,76324618	10,6637081
x3	3,82658497	0,57198465	7,48437386

xs - erste Näherung **3,5**

	xn	f(xn)	f'(xn)
xs	3,5	-1,4375	4,875
x1	3,79487179	0,33887962	7,21696252
x2	3,74791581	0,00919171	6,82656191
x3	3,74656934	7,4716E-06	6,81546474

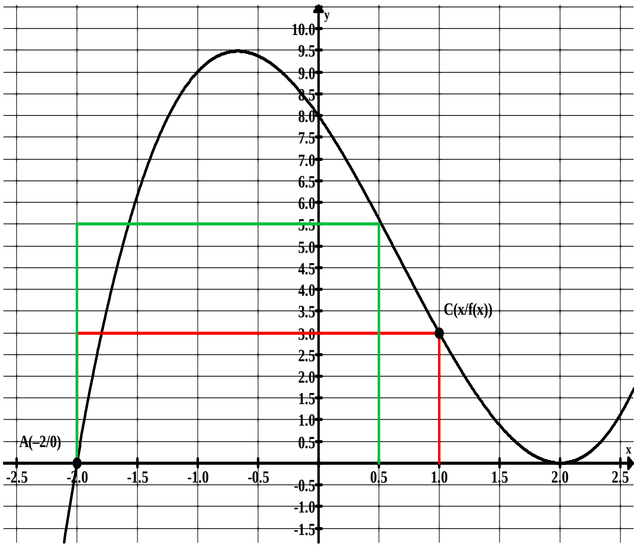
xs - erste Näherung **4**

	xn	f(xn)	f'(xn)
xs	4	2	9
x1	3,77777778	0,21673525	7,07407407
x2	3,74713981	0,00389681	6,8201657
x3	3,74656844	1,3451E-06	6,81545733

Es kann auch ein anderes Näherungsverfahren, z.B. regula falsi, genutzt werden

Interpretation:
Nullstelle nicht exakt ermittelt, der Funktionswert weicht an der Stelle ... um ... von Null ab. Durch weitere Iterationsschritte kann man sich der Nullstelle beliebig genau nähern.

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
2	Ansatz: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $f''(x)=6ax+2b$	3				
	Bedingungsgefüge: 1. $f'(-1)=0$ (Information aus der Grafik)			1		
	2. $f(0)=0$ (Graph geht durch $O(0\mid 0)$)		1			
	3. $f''(-\frac{1}{3})=0$ (notw. Bedingung Wendepunkt)		1			
	4. $f(-2)=-2$ (Graph geht durch $Q(-2\mid -2)$)		1			
	Gleichungssystem: I: 0 = 3a -2b +c II: 0 = d III: 0 = -2a +2b IV: -2 = -8a +4b -2c Lösen des Gleichungssystems (ebenso Ersatz-LGS)		5			
	Daraus ergibt sich: $a=1,\quad b=1,\quad c=-1,\quad d=0$	2				
	Und für den Funktionsterm: $f(x)=x^3+x^2-x$	1				
	Summe	6	8	1		
	mögliche BE	15			erreichte BE	

Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
3.1	$A = a\cdot b = 3\cdot 3 = 9FE$	1				
3.2	$A = 2{,}5\cdot f(0{,}5) = \frac{5}{2}\cdot(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}-2+8) = \frac{225}{16}FE$ 	1 1	1			
3.3	Ansatz: $A(x) = (2+x)\cdot f(x)$ Zielfunktion: $A(x) = (2+x)\cdot f(x) = (2+x)\cdot(x^3-2x^2-4x+8)$ $= x^4-8x^2+16$		1	1		
3.4	Bedingung für ein Maximum: $A'(x_E)=0$ und $A''(x_E)<0$ $A'(x) = 4x^3-16x$ $A''(x) = 12x^2-16$ $A'(x_E) = 0 = 4x_E^3-16x_E = 4x_E(x_E^2-4)$ $x_{E1} = 0$ und $x_{E2,3} = \pm 2$ $x_{E2,3} = \pm 2$ sind Stellen der Minima mit $A(\pm 2)=0$ (Siehe Graph, Rechtecke mit Seitenlängen 0 LE). $A''(0) = -16 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt bei $x_{E1}=0$ Der Flächeninhalt des Rechtecks ist für x=0 maximal. A_{max}=16FE	1 1 1 1	1 2 1 1			
	Summe	7	7	1		
	mögliche BE	15			erreichte BE	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
4	Funktionsgleichung von *k*:					
	$k(x) = 0{,}002\cdot(x-5)\cdot(x-40)^2$					
	$k(x) = 0{,}002\cdot(x^3-85x^2+2000x-8000)$					
	$k(x) = 0{,}002x^3-0{,}17x^2+4x-16$	3				
	Ansatz für Flächeninhalt:					
	$A = A_1 + A_2 - A_3$			3		
	$A_1 = 51\cdot 5 = 255\text{m}^2$ (Rechteck)	2				
	$A_2 = \int_5^{45} p(x)dx = P(45) - P(5)$		3			
	P ist Stammfunktion von *p* und					
	$P(x) = 0{,}01x^3 - 1{,}35x^2 + 63{,}75x$		2			
	$P(45) = 1046{,}25$ und $P(5) = 286{,}25 \Rightarrow$					
	$A_2 = 760\text{m}^2$	3				
	$A_3 = \int_5^{40} k(x)dx = K(40) - K(5)$		3			
	K ist Stammfunktion von *k* und					
	$K(x) = 0{,}0005x^4 - \frac{17}{300}x^3 + 2x^2 - 16x$		3			
	$K(40) \approx 213{,}33$ und $K(5) \approx -36{,}77 \Rightarrow$					
	$A_3 = 250{,}1\text{m}^2$	3				
	$A = 255 + 760 - 250{,}1 = 764{,}9\text{m}^2$	1				
	$2\cdot 734{,}9\text{m}^2 : 30\text{m}^2 = 50{,}99$	1				
	Man braucht 51 Eimer Farbe.	1	2			
	Summe	14	13	3		
	mögliche BE		30		erreichte BE	