Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung

Abschlussprüfung
an der Fachoberschule im Schuljahr 2009/2010

Fach	**Mathematik (A)**
Name, Vorname	
Klasse	
Prüfungstag	5. Mai 2010
Prüfungszeit	09:00 - 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Formelsammlung, nichtprogrammierbarer und nichtgrafikfähiger Taschenrechner
Allgemeine Arbeitshinweise	Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen. Für jede neue Aufgabe ist ein neuer gekennzeichneter Bogen zu beginnen. Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem **Abzug** von bis zu **einem Punkt** (Malus-Regelung). **Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!**
Spezielle Arbeitshinweise	**Der Aufgabensatz besteht aus 4 Aufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen!** Die Lösungswege müssen klar gegliedert, schrittweise und eindeutig nachvollziehbar sowie angemessen kommentiert sein. Nebenrechnungen sind durch Einrücken etc. kenntlich zu machen. Nur einwandfrei Leserliches wird bewertet. **Die erste nicht durchgestrichene Lösung zählt.**

Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter (Reinschrift): _______ ***Blätter***

Bewertungseinheiten, und Gesamtpunkte und Gesamtnote[1]:

Aufgabe Nr.:	Soll Punkte	Ist	Ist (ggf. Zweitkorrektur)
1	40		
2	15		
3	12		
4	33		
Summe:	100		
Notenpunkte:	15	____ Punkte	____ Punkte
Maluspunkt	-1	____ Punkt	____ Punkt
Insgesamt:		_____ Punkte Note:_____	_____ Punkte Note:_____
Datum, Unterschrift:			

[1] gilt nur für doppelt qualifizierende Bildungsgänge mit Fachhochschulreife

1 **/40**

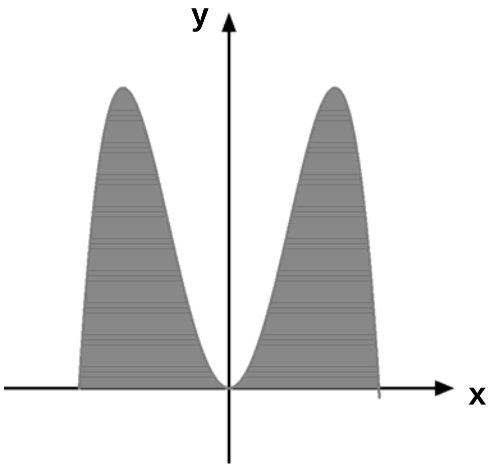
Der symmetrische Querschnitt einer Hügelkette lässt sich näherungsweise durch den Graphen der nachfolgenden Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{36000}x^4 + \frac{1}{5}x^2; \quad \text{mit } x \in D_f$$

beschreiben. Die Talsohle liegt im Koordinatenursprung.

(Hierbei gilt: 1 Einheit $\triangleq$ 1 m)

grobe Skizze:



1.1 Untersuchen Sie, um welches Symmetrieverhalten es sich bei dem zugehörigen Graphen handelt und begründen Sie ihre Aussage. **/2**

1.2 Bestimmen Sie die maximale Höhe der Hügelkette bezogen auf die Talsohle. **/9**

1.3 Bestimmen Sie die Gesamtbreite der Hügelkette auf Höhe der Talsohle. **/7**

1.4 Nach der Schneeschmelze füllt sich das Tal mit Wasser bis zu einer Höhe von 30 m. Wie breit ist der so entstandene Fluss? **/9**

1.5 Zeichnen Sie den gesamten Verlauf der Hügelkette in ein Koordinatensystem unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte und schraffieren Sie den entstandenen Flussquerschnitt. Betrachten Sie hierbei nur den Verlauf oberhalb der Talsohle (x- Achse). **/4**

1.6 Bestimmen Sie die Gesamtwassermenge, die man bei einer Stauhöhe von 30 m aufstauen könnte, wenn die Hügelkette eine Gesamtlänge von 3 km hätte. **/9**

Hinweis: Die Querschnittsfläche der Hügelkette ändert sich über diese Gesamtlänge nicht.

2 **/15**

Der zum Koordinatenursprung punktsymmetrische Graph einer Funktion f fünften Grades besitzt den Wendepunkt $W(1|1)$. Der Anstieg der Wendetangente t in diesem Punkt beträgt 9.

2.1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion. **/12**

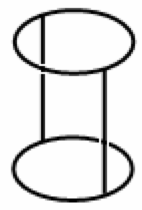
2.2 Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Wendetangente t. **/3**

Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie <u>ersatzweise</u> das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion f.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
25a & + & 9b & + & c & - & d & = & 9 \\
-10a & - & 6b & - & 2c & & & = & -18 \\
-a & + & b & + & 3c & & & = & -5 \\
10a & + & 3b & & & & & = & 0
\end{array}$$

3 **/12**

Eine Haltevorrichtung für Müllsäcke wird aus zwei kreisförmigen Ringen und zwei geraden Verbindungsstreben aus Stahlband zusammengeschweißt, so dass die Form eines geraden Kreiszylinders angedeutet wird (siehe Skizze). Insgesamt werden 4m Stahlband verarbeitet.



Die Höhe h und der Radius r sollen so optimiert werden, dass der angedeutete Zylinder maximales Volumen hat.

3.1 Weisen Sie nach, dass $V(r) = 2\pi r^2 - 2\pi^2 r^3$ die Funktionsgleichung der gesuchten Zielfunktion ist (Längeneinheit: 1m). **/4**

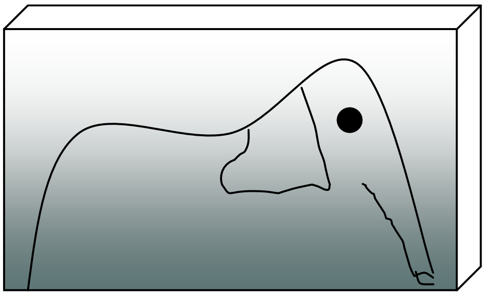
3.2 Für welche Maße *r* und *h* nimmt der Zylinder maximales Volumen an? **/8**
Wie groß ist das maximale Volumen?

4 **/33**

Eine Holzfigur (Elefant) soll gemäß der Skizze aus einem Holzblock mit den Maßen

14 cm x 10 cm x 4 cm (Breite x Höhe x Tiefe) herausgesägt werden.

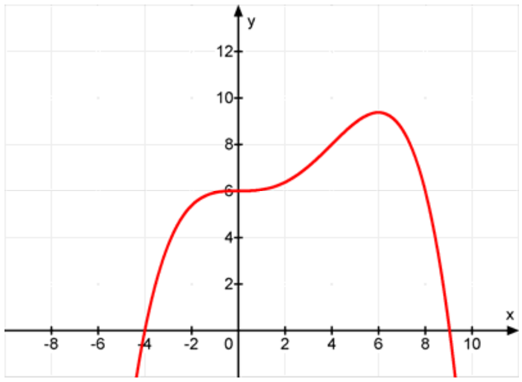
Die Augen, die Ohren und der Rüssel werden nachträglich aufgemalt.



Hersteller und Mathematiker haben sich geeinigt, dass das Koordinatensystem wie in nebenstehender Abbildung angelegt werden soll und der Umriss der Figur durch die Funktionsgleichung

$$f(x) = -\frac{1}{128}x^4 + \frac{1}{16}x^3 + 6; \qquad \text{mit} \quad x \in D_f$$

beschrieben werden kann.



4.1 Berechnen Sie die Breite der Holzfigur unter der Voraussetzung, dass die erste Nullstelle der Funktion f bei $x = -4$ liegt. **/6**

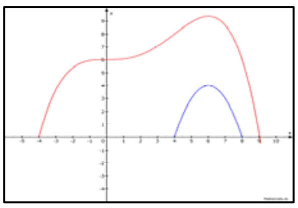
Die zweite Nullstelle bestimmen Sie durch ein geeignetes Näherungsverfahren auf vier Nachkommastellen genau.

Brechen Sie Ihre Berechnung nach drei Iterationsschritten oder bei einem Fehlerquotienten von $f(x) \leq 0{,}01$ ab.

<u>Hinweis:</u>
Sollten Sie die zweite Nullstelle nicht berechnen können, rechnen Sie mit dem Wert $x = 9{,}2500$ weiter.

4.2 Für eine exakte Herstellung des Produktes muss auch die Lage der Wendepunkte bekannt sein. Berechnen Sie diese. **/6**

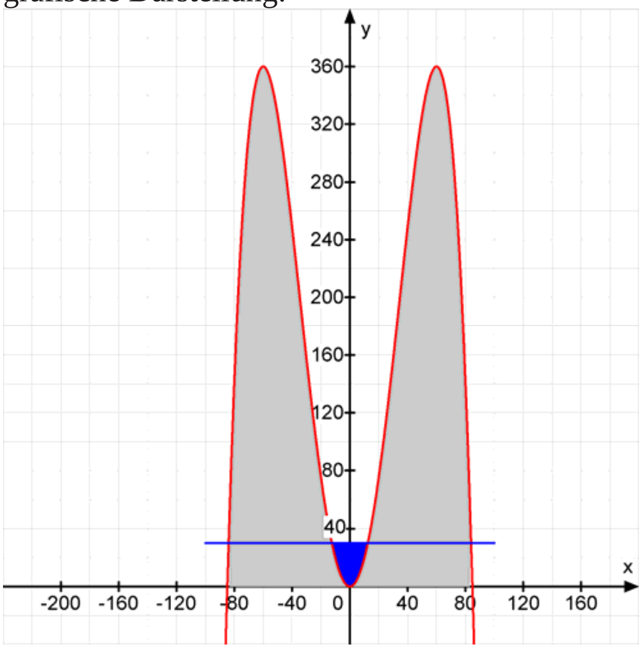
4.3 Welches Volumen hat der Elefant? **/8**

4.4 

Angenommen, der Rüssel des Elefanten soll bereits während der Herstellung herausgesägt werden, wie würde sich das Volumen der Figur verändern? **/9**
Der Umriss des zusätzlich auszusägenden Stückes (Parabel in der Skizze dargestellt) lässt sich durch die Funktionsgleichung $p(x) = -x^2 + 12x - 32$ beschreiben.

4.5 Mit wie viel Prozent Abfall muss der Produzent in diesem Fall rechnen? **/4**

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
1.1	$f(x) = f(-x)$ oder die Exponenten von x sind gerade, der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.		2			
1.2	Höhe der Hügelkette: $f(x) = -\frac{1}{36000}x^4 + \frac{1}{5}x^2$ $f'(x) = -\frac{4}{36000}x^3 + \frac{2}{5}x$ $f''(x) = -\frac{1}{3000}x^2 + \frac{2}{5}$ $f'(x) = 0$ $-\frac{4}{36000}x^3 + \frac{2}{5}x = 0$ $x(-\frac{4}{36000}x^2 + \frac{2}{5}) = 0$ $x_{E1} = 0\ (Talsohle)$ $-\frac{4}{36000}x^2 + \frac{2}{5} = 0$ $x_{E2/3} \approx \pm\sqrt{3600} = \pm 60m$ $f''(x_{E2}) = -0{,}8 < 0;\ Maximum$ $f''(x_{E3}) = -0{,}8 < 0;\ Maximum$ $(alternativ: Begründung\ über\ Verlauf\ des\ Graphen)$ $f(x_{E2}) = f(x_{E3}) = 360m$	1 1 1 2	1 1 2			
1.3	Nullstellen von f: $f(x) = 0$ $-\frac{1}{36000}x^4 + \frac{1}{5}x^2 = 0$ $x^2(-\frac{1}{36000}x^2 + \frac{1}{5}) = 0$ $x_{N1/2} = 0\ (Talsohle)$ $-\frac{1}{36000}x^2 + \frac{1}{5} = 0$ $x_{N3/4} = \pm\sqrt{\frac{36000}{5}} = \pm\sqrt{72000} \approx \pm 84{,}85\ m$ $Gesamtbreite: b = 2 \cdot 84{,}85m = 169{,}7m$	1 1	2 2	1		

1.4	$f(x) = -\frac{1}{36000}x^4 + \frac{1}{5}x^2 = 30$			1		
	$-\frac{1}{36000}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 30 = 0$	1				
	$z = x^2$		1			
	$-\frac{1}{36000}z^2 + \frac{1}{5}z - 30 = 0$		1			
	$z^2 - \frac{36000}{5}z + 30 \cdot 36000 = 0$		1			
	$z_{1/2} = \frac{7200}{2} \pm \sqrt{\frac{7200^2}{4} - 1080000}$		1			
	$x_{1/2} = \pm\sqrt{z_1} \approx \pm 83{,}94m$					
	$x_{3/4} = \pm\sqrt{z_2} \approx \pm 12{,}38m$	1	1			
	$Breite\ des\ Flusses: b = x_3 - x_4 = 24{,}76m$	1				
1.5	grafische Darstellung: 	3	1			

1.6	Ansatz:					
	$V = 3000 \cdot 2 \cdot \int_0^{12,38} ((30 - f(x))dx$		2	1		
	$(Symmetrie\ beachten)$					
	$= 3000 \cdot 2 \cdot \int_0^{12,38} ((30 - (-\frac{1}{36000}x^4 + \frac{1}{5}x^2)dx$		1			
	$= 6000 \cdot \int_0^{12,38} (30 + \frac{1}{36000}x^4 - \frac{1}{5}x^2)dx$		1			
	$= 6000 \cdot \left[30x + \frac{1}{5 \cdot 36000}x^5 - \frac{1}{3 \cdot 5}x^3\right]_0^{12,38}$		1			
	$= 6000 \cdot \left(30 \cdot 12,38 + \frac{12,38^5}{180000} - \frac{12,38^3}{15}\right)$		2			
	$\approx 1479128,2 m^3$	1				
	Summe	14	23	3		
	mögliche BE		40			erreichte BE

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
2.1	Ansatz: Da der Graph der Funktion f punktsymmetrisch , hat sie nur ungerade Exponenten		1			
	$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$					
	$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$	1				
	$f''(x) = 20ax^3 + 6bx$					
	Bedingungsgefüge:					
	1. $f(1) = 1$ Punkt $W(1\|1)$	1				
	2. $f''(1) = 0$ Wendepunkt bei $x = 1$		1			
	3. $f'(1) = 9$ Anstieg Wendetangente gleich 9			1		
	Gleichungssystem:					
	I: $a + b + c = 1$					
	II: $20a + 6b = 0$		1			
	III: $5a + 3b + c = 9$					
	Lösen des Gleichungssystems (auch Ersatz-LGS)		4			
	Lösungen des Gleichungssystems (auch Ersatz-LGS) $a = -3;\quad b = 10;\quad c = -6;$		1			
	Funktionsgleichung: $f(x) = -3x^5 + 10x^3 - 6x$	1				

2.2	Funktionsgleichung der Wendetangente t: lineare Funktion $t(x) = mx + n$ mit Anstieg $m = f'(1) = 9$ und Punkt $W(1\|1)$ $\Rightarrow 1 = 9*1 + n$ $n = -8$ $\Rightarrow t(x) = 9x - 8$	1 1	1			
	Summe	5	9	1		
	mögliche BE	15			erreichte BE	

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
3.1	Hauptbedingung: $V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$ soll maximal sein Nebenbedingung: $2 \cdot 2\pi r + 2h = 4 \Leftrightarrow h = 2 - 2\pi r$ Nebenbedingung in Hauptbedingung einsetzen Zielfunktion: $V(r) = \pi r^2 \cdot (2 - 2\pi r) = 2\pi r^2 - 2\pi^2 r^3$		1 2	1		
3.2	Ableitungen: $V'(r) = 4\pi r - 6\pi^2 r^2 \Rightarrow V''(r) = 4\pi - 12\pi^2 r$ Notw. Bed.: $V'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r - 6\pi^2 r^2 = 0 \Leftrightarrow$ $r(4\pi - 6\pi^2 r) = 0$ Lösungen: $r_1 = 0$ ist nicht sinnvoll $r_2 = \frac{2}{3\pi} \approx 0{,}212$ ist sinnvoll Hinreichende Bedingung $V''(r_2) < 0$ prüfen $V''(0{,}212) = -12{,}54 < 0 \Rightarrow$ Max. Optimale Höhe berechnen $h_{\max} = 2 - 2\pi \cdot \frac{2}{3\pi} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$ Maximales Volumen berechnen $V_{\max} \approx \pi \cdot 0{,}212^2 \cdot 0{,}667 = 0{,}0942$ Antwortsatz mit Maßeinheiten	1 1 1 1	1 2 1			
	Summe	4	7	1		
	mögliche BE	12			erreichte BE	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
4.1	*Newtonsches Näherungsverfahren*: $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $f(x)=-\frac{1}{128}x^4+\frac{1}{16}x^3+6$ $f'(x)=-\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{16}x^2$	1 1				
	Startwert: $f(8)=6$ $f(9)=0,3047 \mapsto$ *Startwert* $f(10)=-9,625$		1			
	$x_2=9+\frac{0,3047}{7,5938}=9,0401$ $f(x_2)=-0,0038<0,01$		1			
	Abbruch bereits hier möglich, da Fehlerquotient unter 0,01 liegt.			1		
	Die zweite Nullstelle liegt bei ca. 9,0401, deshalb beträgt die Breite der Figur 13,04 cm. (Alternativ sind auch Ragula falsi oder das Halbierungsverfahren zur Berechnung der 2. Nullstelle möglich.)	1				
4.2	<u>Ansatz für Wendepunkte:</u> $f''(x)=0 \quad ; \qquad f'''(x)\neq 0$		1			
	$f'(x)=-\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{16}x^2$ $f''(x)=-\frac{3}{32}x^2+\frac{3}{8}x$ $f'''(x)=-\frac{3}{16}x+\frac{3}{8}$	1				
	$0=-\frac{3}{32}x^2+\frac{3}{8}x=x(-\frac{3}{32}x+\frac{3}{8})$		1			
	$x_1=0\rightarrow f(0)=6$ $x_2=4\rightarrow f(4)=8$	1				

	$f'''(0)=\frac{3}{8}\neq 0$ $f'''(4)=-\frac{3}{8}\neq 0$ Die Wendepunkte der Funktion liegen bei $P_{w1}(0/6)$ *und* $P_{w2}(4/8)$.	1 1				
4.3	<u>Ansatz für Flächeninhalt:</u> $A_f=\int_{-4}^{9,0401} f(x)dx=\int_{-4}^{9,0401}(-\frac{1}{128}x^4+\frac{1}{16}x^3+6)dx$ $Stammfunktion:$ $F(x)=-\frac{1}{640}x^5+\frac{1}{64}x^4+6x$ $A_f=F(9,0401)-F(-4)=64,2576-(-18,4)$ $=82,6576\,cm^2$ <u>Volumen:</u> $V=A_f*Tiefe=82,6576cm^2*4cm=330,6304cm^3$ Das Volumen der Holzfigur beträgt $330,6304cm^3$.	1 2 1	1 1 1	1		
4.4	<u>Ansatz für neuen Flächeninhalt:</u> a) Nullstellen von p : $p(x)=0$ $-x^2+12x-32=0$ $p,q-Formel$ $x_{N1}=4$ $x_{N2}=8$ b) Fläche zwischen p *und x-Achse* : $A_p=\int_4^8 p(x)dx=\int_4^8(-x^2+12x-32)dx$ $Stammfunktion:$ $F(x)=-\frac{1}{3}x^3+6x^2-32x$ $A_p=F(8)-F(4)=-42,6667-(-53,3333)$ $=10,6666\,cm^2$	1 1 1	1 1 1 1			

	<u>neues Volumen:</u> $V = (A_f - A_p) * Tiefe$ $= (82,6576 cm^2 - 10,6667) * 4 cm = 287,9636 cm^3$ Das Volumen der Holzfigur beträgt jetzt $287,9636 cm^3$ und ist demzufolge um $42,6668\, cm^3$ kleiner.	1		1		
4.5	$V_{Quader} = 14cm * 10cm * 4cm = 560\ cm^3$ $V_{Abfall} = 560cm^3 - 287,9636cm^3 = 272,0364cm^3$ $\frac{560cm^3}{100\%} = \frac{272,0364cm^3}{x\%}$ $x = 48,5779\%$ Der Abfall beträgt $48,5779$ %.	1 1	1 1			
	Summe	17	13	3		
	mögliche BE	33			erreichte BE	