Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung

Abschlussprüfung
an der Fachoberschule im Schuljahr 2008 / 2009

Fach	**Mathematik (B)**
Name, Vorname	
Klasse	
Prüfungstag	27. Mai 2009
Prüfungszeit	09:00 - 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Mathematische Formelsammlungen (keine selbst angefertigten) ohne Musterlösungen, Taschenrechner ohne Graphikdisplay, frei programmierbare Speicher müssen gelöscht sein. Bleistifte dürfen nur für Skizzen benutzt werden.
Allgemeine Arbeitshinweise	Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen. Für jede neue Aufgabe ist ein neuer gekennzeichneter Bogen zu beginnen. Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem **Abzug** von bis zu **einem Punkt** (Malus-Regelung). **Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!**
Spezielle Arbeitshinweise	Der Aufgabensatz besteht aus vier verschiedenen Einzelaufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen!

Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter (Reinschrift): ______ ***Blätter***

Bewertungseinheiten, und Gesamtpunkte und Gesamtnote[1]:

Aufgabe Nr.:	Soll %	Ist	Ist (ggf. Zweitkorrektur)
1	40		
2	15		
3	15		
4	30		
Summe:	100		
Notenpunkte:	15	____ Punkte	____ Punkte
Maluspunkt	-1	____ Punkt	____ Punkt
Insgesamt:		_____ Punkte Note:_____	_____ Punkte Note:_____
Datum, Unterschrift:			

[1] gilt nur für doppelt qualifizierende Bildungsgänge mit Fachhochschulreife

1 Kurvendiskussion /40

Gegeben ist eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3; \quad x \in \mathbb{R}$.

1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f und begründen Sie Ihre Aussage. **/2**

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen. **/2**

1.3 Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen von f mit der y-Achse an. **/1**

1.4 Zwei Nullstellen der Funktion liegen bei $x_{N2} = 1$ und $x_{N2} = 3$. Begründen Sie, ohne eine Polynomdivision durchzuführen, warum sich die Funktion f auch als folgendes Polynom darstellen lässt: **/2**

$$f(x) = \left(-\frac{1}{4}x^2 - x - 1\right)(x-1)(x-3).$$

1.5 Berechnen Sie die restlichen Nullstellen der Funktion f. **/6**

Erklären Sie, um was für Nullstellen es sich handelt und welche Bedeutung diese Nullstellen für den Graphen der Funktion f haben.

1.6 Nennen Sie die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zur Bestimmung der Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von f und berechnen Sie diese. **/14**

1.7 Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-3 \mid 3{,}5]$ unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte. **/6**

1.8 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Wendetangente von f, deren Steigung negativ ist und zeichnen Sie den Graphen in das obige Koordinatensystem. **/7**

Der Graph der Wendetangente und die Koordinatenachsen bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Schraffieren Sie dieses und berechnen Sie die Hypotenuse des Dreieckes.

2 Rekonstruktion von Funktionen /15

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades schneidet bei $y=-3$ die Ordinatenachse. Bei $x=-2$ liegt eine Extremstelle und bei $x=-1$ eine Wendestelle vor. Die zugehörige Wendetangente verläuft parallel zu der Geraden mit $g(x)=-3x+8;\ x\in\mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f durch Lösen des entsprechenden Gleichungssystems.

Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie <u>ersatzweise</u> das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktion.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
6a & - & 2b & + & 0{,}5c & + & 2d & = & -6 \\
-3a & + & 1b & & & + & 1d & = & -3 \\
6a & - & 4b & + & 2c & & & = & -6 \\
 & & & & & & 1d & = & -3
\end{array}
$$

3 Extremwertaufgabe /15

Gegeben ist der Graph der Funktion f mit

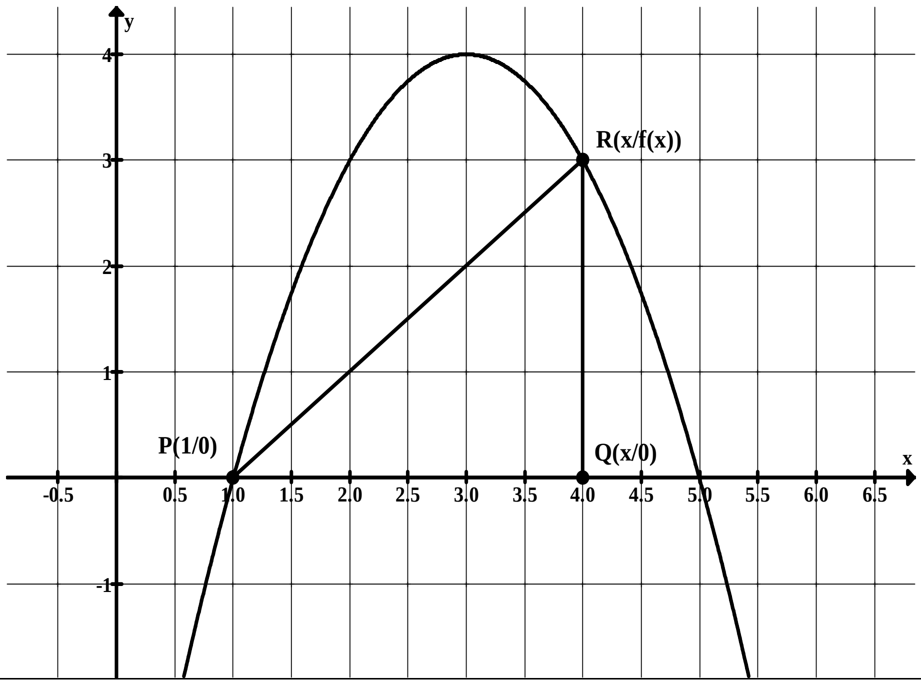
$f(x) = -x^2 + 6x - 5 \quad x \in \mathbb{R}$,

und das eingezeichnete Dreieck mit den Eckpunkten

P(1|0),

Q(x|0) und

R(x|f(x)).



3.1 Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks für $x = 4$ (siehe Zeichnung). **/1**

3.2 Bewegt sich der Punkt R auf dem Graphen von f, so ändert sich der Flächeninhalt des Dreiecks.
Zeichnen Sie für $x = 4{,}5$ das Dreieck in das gegebene Koordinatensystem ein und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. **/2**

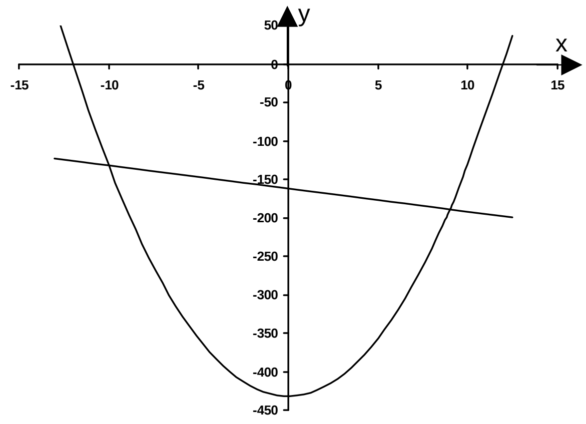
3.3 Weisen Sie nach, dass die Funktionsgleichung der Funktion A, die den Flächeninhalt des Dreiecks in Abhängigkeit von x beschreibt,
$A(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{5}{2}$ lautet. **/2**

3.4 Für welches x aus dem Intervall von +1 bis +5 nimmt das Dreieck einen maximalen Flächeninhalt an? **/10**

Wie groß ist dieser maximale Flächeninhalt?

4 Integralaufgabe **/30**

In der Abbildung nebenan sind eine Parabel p mit der Funktionsgleichung $\boldsymbol{p(x) = 3x^2 - 432}$ und eine Gerade g mit der Funktionsgleichung $\boldsymbol{g(x) = -3x - 162}$ dargestellt.



4.1 Zeigen Sie mit Hilfe der Integralrechnung, dass die Fläche, die zwischen der Parabel und der x-Achse eingeschlossen wird, den Inhalt 6912 FE hat. **/7**

4.2 Die Gerade g zerlegt die Fläche zwischen der Parabel und der x-Achse in zwei Teilflächen, die nahezu gleich groß sind. **/11**

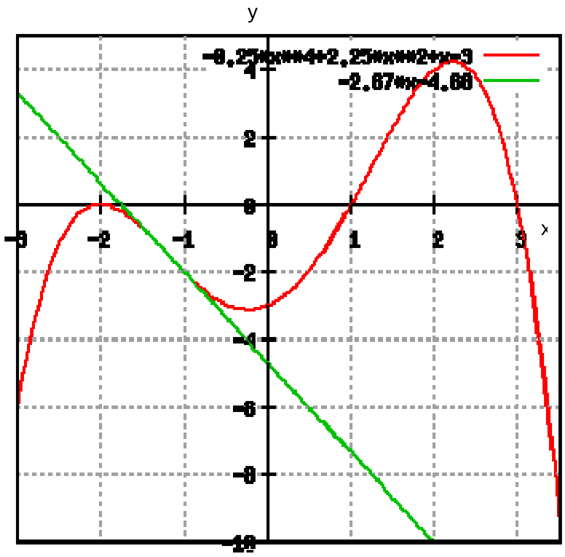
Berechnen Sie den Flächeninhalt der unteren dieser beiden Teilflächen und zeigen Sie, dass er zwischen 49 % und 50 % des gesamten Flächeninhaltes zwischen der Parabel und der x-Achse liegt.

4.3 Wie weit muss man die Parabel p nach oben schieben, so dass man den Graphen einer quadratischen Funktion f erhält, für die $\int_{-12}^{12} f(x)dx = 0$ gilt, und wie lautet die Funktionsgleichung von f? **/12**

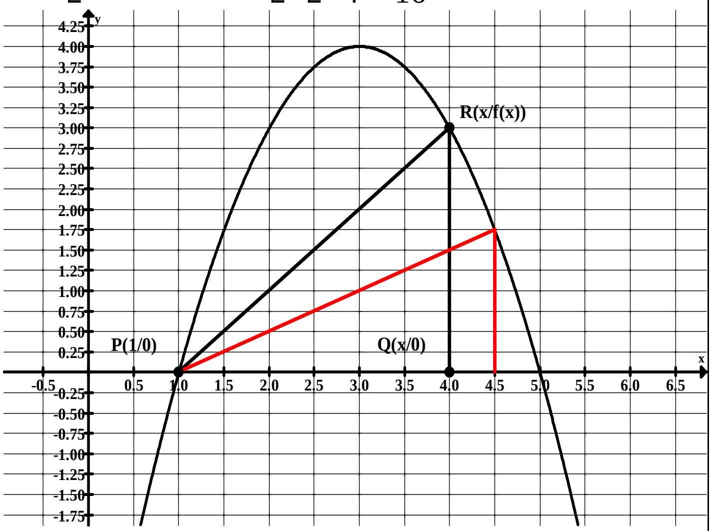
Erläutern Sie mit Hilfe einer Skizze, warum das Integral den Wert Null hat.

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
1.1	$f(-x) \neq -f(x)$ und $f(-x) \neq f(x)$ oder die Exponenten von *x* sind gerade und ungerade, der Graph ist weder achsensymmetrisch zur *y*-Achse noch punksymmetrisch zum Ursprung.		2			
1.2	Der höchste Exponent der Variablen im Funktionsterm von f ist 4. Da a_4 im Summand a_4x^4 negativ ist ($-\frac{1}{4}$), verläuft der Graph von „minus unendlich“ nach „minus unendlich“ oder: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.		2			
1.3	$f(0) = -3$ $P_y(-3 \mid 0)$	1				
1.4	Wenn man das Restpolynom $r(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$ mit beiden Linearfaktoren ausmultipliziert erhält man wieder die Ausgangsfunktion; $\left(-\frac{1}{4}x^2 - x - 1\right)(x-1)(x-3) =$ $-\frac{1}{4}x^4 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3$	1	1			
1.5	$r(x) = 0 = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$ $0 = x^2 + 4x + 4$ $x_{N3/4} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} - 4} = -2$ Es handelt sich um eine doppelte Nullstelle, d.h. der Graph der Funktion berührt an dieser Stelle die Abszissenachse. Dieser Punkt ist also gleichzeitig ein Extrempunkt. $P_{01}(1 \mid 0)$ $P_{02}(3 \mid 0)$ $P_{03/04}(-2 \mid 0)$	2	1 1 2			
1.6	a)Extrempunkte, notw. und hinr. Bedingung: - Minimum: $f'(x_E) = 0$ und $f``(x_E) > 0$ - Maximum: $f'(x_E) = 0$ und $f``(x_E) < 0$	1				

	$f'(x_E)=0=-x^3+\frac{9}{2}x+1$		1			
	$x_{E1}=-2 \mapsto LF:(x+2)$					
	1. Nullstelle von $f'(x_E)$ übernehmen aus Aufgabe 1.5 ($x_{N3/4}=-2$). Ansonsten auch planvolles Raten möglich.					
			1			
	$(-x^3+0x^2+\frac{9}{2}x+1):(x+2)=-x^2+2x+\frac{1}{2}$		1			
	$x^2-2x-\frac{1}{2}=0$					
	$x_{E2/3}=1\pm\sqrt{1+\frac{1}{2}}=1\pm1,22$	1				
	$x_{E2}=2,22$ und $x_{E3}=-0,22$					
	$f``(x_E)=-3x^2+\frac{9}{2}$	1				
	$f''(-2)=-7,5<0 \Rightarrow Hochpunkt$					
	$f''(2,22)=-10,29<0 \Rightarrow Hochpunkt$		2			
	$f''(-0,22)=4,35>0 \Rightarrow Tiefpunkt$					
	$HP_1(-2\,\|\,0)$					
	$TP(-0,22\,\|\,-3,11)$	2				
	$HP_2(2,22\,\|\,4,24)$					
	b)Wendepunkte, notw. und hinr. Bedingung:					
	$f``(x_W)=0$ und $f```(x_W)\neq 0$	1				
	$f''(x_w)=0=-3x^2+\frac{9}{2}$	1				
	$x_{w1/2}=\pm1,22$					
	$f'''(x_w)=-6x$					
	$f'''(-1,22)=7,35>0 \Rightarrow$ rechts-links-Krümmung		1			
	$f'''(1,22)=-7,35<0 \Rightarrow$ links-rechts-Krümmung					
	$WP_1(-1,22\,\|\,-1,42)$	1				
	$WP_2(1,22\,\|\,1,02)$					

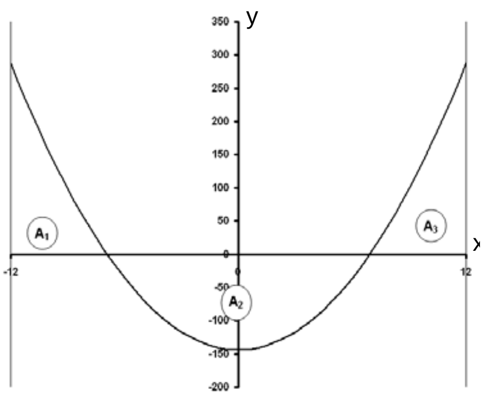
1.7	Intervallgrenzen: $P_1(-3 \mid -6)$ $P_2(3{,}5 \mid -9{,}45)$  	2	4			
1.8	Allgemein: $t(x) = m_t x + b$ im Punkt $WP_1(-1{,}22 \mid -1{,}42)$, da dort die Steigung der Tangente negativ ist. Steigung der Tangenten im WP: $m_t = f`(-1{,}22) = -2{,}67$ $t(x) = -2{,}67x + b$ $-1{,}42 = -2{,}67(-1{,}22) + b$ $b = -4{,}68$ $t(x) = -2{,}67x - 4{,}68$ Tangente zeichnen (siehe 1.7) Berechnung der Hypotenuse des Dreiecks: $c^2 = a^2 + b^2$, d.h. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ - Länge der ersten Kathete a = -4,68 - Länge der zweiten Kathete b entspricht der Nullstelle von t. $0 = -2{,}67x - 4{,}68$ $x = 1{,}75 = b$ $c = \sqrt{(-4{,}68)^2 + (1{,}75)^2} = 4{,}996 \approx 5{,}00$ LE	1	1 1	1 1 1 1		
	Summe	15	21	4		
	mögliche BE		40		erreichte BE	

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
2	Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$	3				
	Bedingungsgefüge: 1. $f''(-1) = 0$ (Wendestelle bei $x_W = -1$) 2. $f(0) = -3$ (Graph geht durch $P(0 \mid -3)$) 3. $f'(-1) = -3$ (Anstieg im Wendepunkt ist gleich -3) 4. $f'(-2) = 0$ (Extremum bei $x_E = -2$)		2	2		
	Gleichungssystem: I: $0 = -6a + 2b$ II: $-3 = d$ III: $-3 = 3a - 2b + c$ IV: $0 = 12a - 4b + c$		5			
	Lösen des Gleichungssystems. Daraus ergibt sich: $a = 1,\quad b = 3,\quad c = 0,\quad d = -3$	2				
	Und für den Funktionsterm: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$	1				
	Summe	6	7	2		
	mögliche BE		15			erreichte BE

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
3.1	$A=\frac{1}{2}\cdot \text{Grundseite}\cdot \text{Höhe}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=4{,}5\text{FE}$	1				
3.2	$A=\frac{1}{2}\cdot 3{,}5\cdot f(4{,}5)=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{4}=\frac{49}{16}\text{FE}$  	1 1				
3.3	Ansatz: $A(x)=\frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot f(x)$ Zielfunktion: $A(x)=\frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot f(x)=\frac{1}{2}(x-1)\cdot(-x^2+6x-5)$ $=-\frac{1}{2}x^3+\frac{7}{2}x^2-\frac{11}{2}x+\frac{5}{2}$		1	1		
3.4	Bedingung für ein Maximum: $A'(x_E)=0$ und $A''(x_E)<0$ $A'(x)=-\frac{3}{2}x^2+7x+\frac{11}{2}$ $A''(x)=-3x+7$ $A'(x_E)=0=\ -\frac{3}{2}x_E^2+7x_E-\frac{11}{2}$ $\Rightarrow x_E^2-\frac{14}{3}x_E-\frac{11}{3}=0\Rightarrow\quad x_{E1}=\frac{11}{3}$ und $x_{E2}=1$ $x_{E2}=1$ ist Stelle des Minimums mit A(1)=0 (Siehe Graph, Dreieck mit Seitenlänge 0 LE).	1 1 1 1	2 1			

	$A''(\frac{11}{3}) = -4 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt bei $x_{E1} = \frac{11}{3}$ Der Flächeninhalt des Dreiecks ist für $x_{E1} = \frac{11}{3}$ maximal. $A_{max} = -\frac{1}{2}\left(\frac{11}{3}\right)^3 + \frac{7}{2}\left(\frac{11}{3}\right)^2 - \frac{121}{6} + \frac{5}{2} = \frac{128}{27}$ FE	1	1 1			
	Summe	8	6	1		
	mögliche BE	15			erreichte BE	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
4.1	Ansatz: $A = \left\| \int_{-12}^{12} p(x)dx \right\| = 2\left\| \int_{0}^{12} p(x)dx \right\| = 2\left\|P(12) - P(0)\right\|$ dabei ist *P* Stammfunktion von p und $P(x) = x^3 - 432x \Rightarrow P(12) = -3456 \Rightarrow$ $A = 2 \cdot 3456 = 6912$	1 1	3 2			
4.2	Differenzfunktion: $f(x) = p(x) - g(x) = 3x^2 + 3x - 270$ Nullstellen der Differenzfunktion: $3x^2 + 3x - 270 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 90 = 0$ Lösungen: $x_1 = -10$ und $x_2 = 9$. Ansatz für Flächeninhalt: $A = \left\| \int_{-10}^{9} f(x)dx \right\| = \left\|F(9) - F(-10)\right\|$ dabei ist *F* die Stammfunktion von *f* und $F(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 270x \Rightarrow$ $F(-10) = 1850$ und $F(9) = -1579{,}5 \Rightarrow$ $A = 3429{,}5$ Anteil an Gesamtfläche: $\frac{3429{,}5}{6912} = 49{,}62\%$	1 2 3 1 1	1 2			

4.3	Ansatz: $f(x)=3x^2+a_0$			1		
	$\int_{-12}^{12} f(x)dx = 2\int_{0}^{12} f(x)dx = 2F(12)=0 \Leftrightarrow$		1	1		
	dabei ist *F* die Stammfunktion von *f* und $F(x)=x^3+a_0x$		1			
	Die Gleichung $2F(12)=0 \Leftrightarrow F(12)=0 \Leftrightarrow 1728+12a_0=0$	1				
	hat die Lösung $a_0=-144$	1				
	Die gesuchte Funktion hat die Funktionsgl. $f(x)=3x^2-144$	1				
	Man muss *p* um 288 Einheiten nach oben schieben, um den Graphen von *f* zu erhalten.	1				
	Skizze: 		1	1		
	Erklärung: $\int_{-12}^{12} f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 = 0$ weil $A_1 + A_3 = A_2$		1	1		
	Zwischensumme	14	12	4		
	mögliche BE		30		erreichte BE	