

Abschlussprüfung an der Fachoberschule im Schuljahr 2009/2010

Fach	Mathematik (B)
Name, Vorname	
Klasse	
Prüfungstag	4. Juni 2010
Prüfungszeit	09:00 - 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Formelsammlung, nichtprogrammierbarer und nichtgrafikfähiger Taschenrechner
Allgemeine Arbeitshinweise	<p>Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen.</p> <p>Für jede neue Aufgabe ist ein neuer gekennzeichneteter Bogen zu beginnen.</p> <p>Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem Abzug von bis zu einem Punkt (Malus-Regelung).</p> <p style="text-align: center;">Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!</p>
Spezielle Arbeitshinweise	<p>Der Aufgabensatz besteht aus 4 Aufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen!</p> <p>Die Lösungswege müssen klar gegliedert, schrittweise und eindeutig nachvollziehbar sowie angemessen kommentiert sein. Nebenrechnungen sind durch Einrücken etc. kenntlich zu machen. Nur einwandfrei Leserliches wird bewertet.</p> <p>Die erste nicht durchgestrichene Lösung zählt.</p>

Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter (Reinschrift): _____

_____ Blätter

Bewertungseinheiten, und Gesamtpunkte und Gesamtnote¹:

Aufgabe Nr.:	Soll Punkte	Ist	Ist (ggf. Zweitkorrektur)
1	41		
2	24		
3	15		
4	20		
Summe:	100		
Notenpunkte:	15	_____ Punkte	_____ Punkte
Maluspunkt	-1	_____ Punkt	_____ Punkt
Insgesamt:		_____ Punkte Note: _____	_____ Punkte Note: _____
Datum, Unterschrift:			

¹ gilt nur für doppelt qualifizierende Bildungsgänge mit Fachhochschulreife

1

/41

Gegeben ist eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x + 4$; $x \in \mathbb{R}$

- 1.1** Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f und begründen Sie Ihre Aussage. **/2**
- 1.2** Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen.. **/2**
- 1.3** Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen von f mit der y -Achse an. **/1**
- 1.4** Begründen Sie, dass die Funktion f im Intervall $[0;1]$ eine Nullstelle haben muss. **/9**
Berechnen Sie diese Nullstelle durch ein geeignetes Näherungsverfahren auf vier Nachkommastellen genau.
Brechen Sie Ihre Berechnung bei einem Fehlerquotienten von $f(x) \leq 0,01$ oder nach höchstens drei Iterationsschritten ab.
- 1.5** Weisen Sie nach, dass eine zweite Nullstelle bei $x = 2$ existiert. **/1**
- 1.6** Nennen Sie die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zur Bestimmung der Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von f und berechnen Sie diese Punkte. **/15**
- 1.7** Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[0;5]$ unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte. **/6**
- 1.8** Gegeben sei nun die Funktionsgleichung $f_a(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + ax^2 - 16x + 4$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. **/5**
Ermitteln Sie, für welches a der Graph der Funktion f keine Wendepunkte besitzt.
Begründen Sie Ihre Antwort.

2

/24

Der Funktionsgraph f einer Funktion dritten Grades besitzt den Extrempunkt $P(1|-2)$. An der Stelle $x = 2$ hat die zugehörige Normale n die Funktionsgleichung $n(x) = -0,1x + 2,2$.

2.1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion f .

/12

Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie ersatzweise das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion f .

$$\begin{array}{rcccccc} 12a & + & 6b & + & 3c & + & 1,5d & = & 3 \\ 2a & + & 2b & + & 2c & + & 2d & = & -4 \\ 3a & - & 2b & - & 2c & & & = & 10 \\ -6a & - & 4b & - & 2c & & & = & 0 \end{array}$$

Falls Sie die Funktionsgleichung der Funktion f nicht bestimmen konnten, arbeiten Sie im Weiteren mit der Funktionsgleichung $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 2$ und der Normalengleichung $n(x) = -0,1x + 2,2$.

2.2 Skizzieren Sie die Graphen der Funktion f sowie der Normale n .

/5

Verwenden Sie hierbei das Extremum von f im Punkt $P(1|-2)$, den Schnittpunkt der Graphen der Funktion f und der Normale n , das absolute Glied der Funktion f sowie das Verhalten von f im Unendlichen.

2.3 Die Graphen der Funktion f und der Normale n sowie die y-Achse schliessen eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

/7

Berücksichtigen Sie bei Ihrer Lösung die folgenden Hinweise:

Die Graphen der Funktion f und der Normale n schneiden sich an der Stelle $x = 2$.

Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse bei ca. $x = 1,75$.

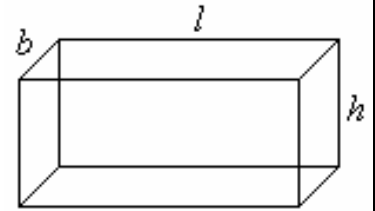
3

/15

Aus Sperrholz soll eine quaderförmige Kiste gebaut werden; alle 12 Kanten sind mit Aluminiumschiene zu verstärken.

Beim Bau sind folgende Maßgaben zu beachten:

1. Die Länge l soll genau das Doppelte der Breite b betragen.
2. Es stehen insgesamt 540 cm Aluminiumschiene zur Verfügung.



- 3.1 Weisen Sie nach, dass man das Volumen der Kiste mit der folgenden Zielfunktionsgleichung berechnen kann (Längeneinheit: 1 cm):

/6

$$V(b) = 270b^2 - 6b^3$$

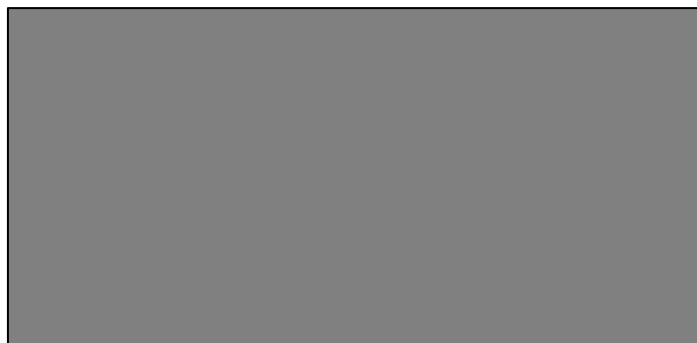
- 3.2 Welche Länge l , Breite b und Höhe h muss die Kiste haben, damit ihr Volumen maximal ist? Wie groß ist das maximale Volumen?

/9

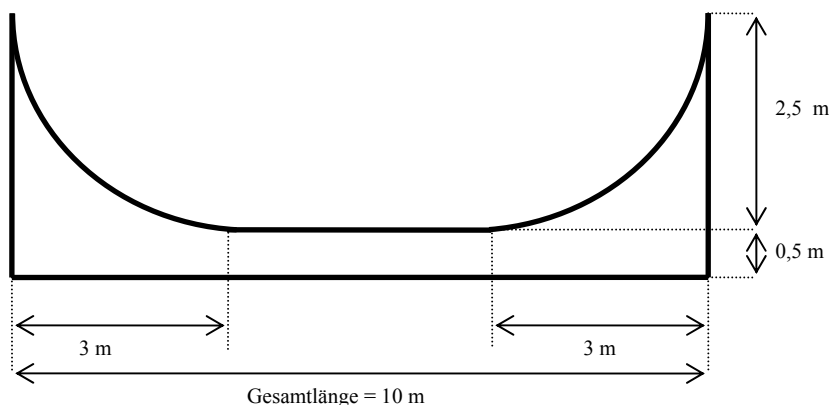
4

/20

Auf dem Freigelände eines Jugendclubs ist der Bau einer „Halfpipe“ (siehe Foto - aus urheberrechtlichen Gründen hier nicht verfügbar) zum Skateboard fahren geplant.



Der Querschnitt der „Halfpipe“ soll folgende Maße haben:



Die Konstrukteure haben festgelegt, dass sich die eigentliche Skaterbahn aus zwei Parabelbögen und einer waagerechten Geraden zusammensetzt. Um sanfte Übergänge zwischen dem geraden und den beiden abschüssigen Abschnitten zu erreichen, befinden sich genau in den Übergängen (bei jeweils 3 m) die Scheitelpunkte der Parabeln.

- 4.1 Stellen Sie die Funktionsgleichung einer der beiden Parabeln auf. Skizzieren Sie diese in einem geeigneten Koordinatensystem und bestimmen Sie die Funktionsgleichung. Falls Sie die Funktionsgleichung der Funktion f nicht bestimmen konnten, arbeiten Sie im Weiteren mit der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{5}{18}x^2$. /6
- 4.2 Berechnen Sie, wie viel m^3 Beton für den Bau der „Halfpipe“ notwendig sind, wenn diese eine Breite von 3 m hat. /6
- 4.3 Sponsoren haben für den Bau dieses Objektes 7000 € zur Verfügung gestellt. Die Jugendlichen haben recherchiert, dass $1 m^3$ Beton 160 € zuzüglich 15% für die Verarbeitung kostet. Berechnen Sie, ob das Geld der Sponsoren reichen wird. /4
- 4.4 Um wie viele Meter müsste die Breite der „Halfpipe“ verändert werden, damit das zur Verfügung stehende Geld voll ausgenutzt wird? /4

Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung																					
		I	II	III	BE	Begutachtung																				
1.1	$f(x) \neq -f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ oder die Exponenten von x sind gerade und ungerade, der Graph ist weder achsensymmetrisch zur y -Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.		2																							
1.2	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$		2																							
1.3	$S_y(0/4)$ da $f(0) = 4$ ist.	1																								
1.4	<p>Es gibt eine Nullstelle im Intervall $[0;1]$, da ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte im Intervall auftritt, denn</p> $f(0) = 4 \text{ und } f(1) = -\frac{11}{4}$ <p>Newtonsches Näherungsverfahren:</p> $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x + 4$ $f'(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ <table style="margin-left: 40px;"> <tr> <td>x_n</td> <td>$f(x_n)$</td> <td>$f'(x_n)$</td> <td>x_{n+1}</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>4</td> <td>-16</td> <td>0,25</td> </tr> <tr> <td>0,25</td> <td>0,7041</td> <td>-10,5469</td> <td>0,3168</td> </tr> <tr> <td>0,3168</td> <td>0,0431</td> <td>-9,2690</td> <td>0,3214</td> </tr> <tr> <td>0,3214</td> <td>0,0002</td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p>$f(0,3214) \leq 0,01$</p> <p>Die Nullstelle liegt bei $x_n \approx 0,3214$</p>	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	0	4	-16	0,25	0,25	0,7041	-10,5469	0,3168	0,3168	0,0431	-9,2690	0,3214	0,3214	0,0002			1 1 1		1		
x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}																							
0	4	-16	0,25																							
0,25	0,7041	-10,5469	0,3168																							
0,3168	0,0431	-9,2690	0,3214																							
0,3214	0,0002																									
1.5	Die Bedingung für eine Nullstelle ist erfüllt, denn es gilt $f(2) = 0$.	1																								

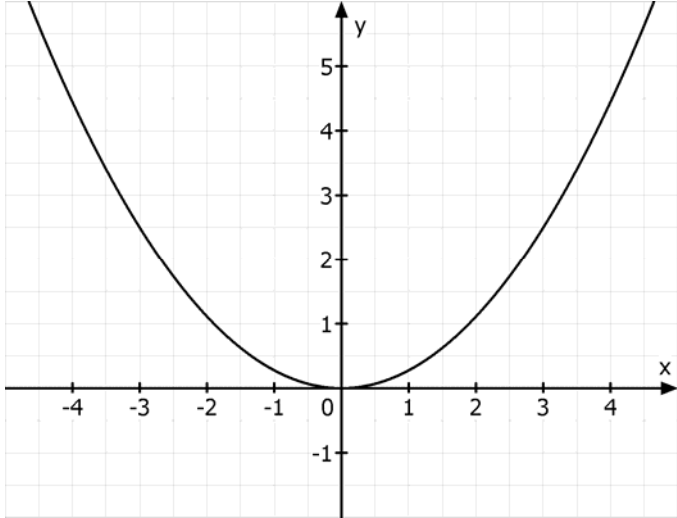
1.6	<p>a)Extrempunkte, notw. und hinr. Bedingung: Hochpunkt: $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) > 0$ Tiefpunkt: $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) < 0$ $f'(x_E) = 0 \Rightarrow$ $x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = 0$ $x_{E1} = 1$; Linearfaktor $(x-1)$ $(x^3 - 9x^2 + 24x - 16) : (x-1) = x^2 - 8x + 16$ $x^2 - 8x + 16 = 0$ $x_{E_{2,3}} = 4 \pm \sqrt{16-16} = 4$ $f''(x) = 3x^2 - 18x + 24$ $f''(4) = 0$ $f''(1) = 9 > 0 \Rightarrow$ <i>Tiefpunkt</i> $f(1) = -\frac{11}{4}$; <i>TP</i>$(1 / -\frac{11}{4})$; an der Stelle $x_{E_{2,3}}$ liegt vermutlich ein Sattelpunkt.</p> <p>b)Wendepunkte, notw. und hinr. Bedingung: $f''(x_w) = 0$ und $f'''(x_w) \neq 0$ $f''(x_w) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0$ $x_{W_{1,2}} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$ $x_{W_1} = 4$; $x_{W_2} = 2$ $f'''(x) = 6x - 18$ $f'''(4) = 6 > 0 \Rightarrow$ rechts-links-Krümmung $f'''(2) = -6 < 0 \Rightarrow$ links-rechts-Krümmung $f(2) = 0$; $WP_2(2/0)$ $f(4) = 4$; $WP_1(4/4)$ ist ein Sattelpunkt, da $f'(4) = f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$</p>	1	1	2	1	1	1	1
		1	1	2	1	1	1	1

1.7	Intervallgrenzen: $f(0) = 4; f(5) = 5,25$ 	1				
1.8	$f'(x) = x^3 - 9x^2 + 2ax - 16 = 0$ $f''(x) = 3x^2 - 18x + 2a$ $f'''(x) = 6x - 18 \neq 0$ $f''(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 2a = 0$ $\Rightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - \frac{2a}{3}}$ 1. Fall: Aus $9 - \frac{2a}{3} < 0$ folgt, dass es für $\frac{27}{2} < a$ keine Lösung, somit keine Wendestelle gibt. 2. Fall: Aus $9 - \frac{2a}{3} = 0$ folgt $a = \frac{27}{2}$ und $x_{1,2} = 3$. $f'''(3) = 0$ somit keine Entscheidung zur Existenz der Wendestelle Es gibt keine Wendestelle. Der Nachweis $f_{\frac{27}{2}}''(x) \geq 0$ für alle x wird nicht gefordert.	5	2	2	1	2
	Summe	20	19	2		
	mögliche BE	41		erreichte BE		

Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
2.1	<p>Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$</p> <p>Bedingungsgefüge: 1. $f(1) = -2$ Punkt $P(1 -2)$ 2. $f'(1) = 0$ Extremum bei $x = 1$ 3. $f(2) = 2$ $f(2) = n(2) = 2$ 4. $f'(2) = 10$ $m_n m_t = -1 \Rightarrow f'(2) = m_t = 10$</p> <p>Gleichungssystem: I: $a + b + c + d = -2$ II: $3a + 2b + c = 0$ III: $8a + 4b + 2c + d = 2$ IV: $12a + 4b + c = 10$</p> <p>Lösen des Gleichungssystems (auch Ersatz-LGS) Lösungen des Gleichungssystems (auch Ersatz-LGS) $a = 2; b = -4; c = 2; d = -2$</p> <p>Funktionsgleichung: $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 2$</p>	1	1	1		
2.2	<p>Graphen von f und n:</p> <p>Die genaue Lage des lokalen Maximum $H(\frac{1}{3} -\frac{46}{27})$ bleibt unberücksichtigt, seine Existenz ergibt sich aus den bekannten Eigenschaften von f.</p>	1	3	1		

2.3	$A = \left \int_0^{1,75} f(x) dx \right + \left \int_0^2 n(x) dx \right - \left \int_{1,75}^2 f(x) dx \right $ $A = \left \left[\frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + x^2 - 2x \right]_0^{1,75} \right + \left \left[-0,05x^2 + 2,2x \right]_0^2 \right $ $- \left \left[\frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + x^2 - 2x \right]_{1,75}^2 \right $ $A = -2,89 - 0 + 4,2 - 0 - -2,67 + 2,89 $ $A = 6,87$	2			
	Summe	7	13	4	
	mögliche BE	24			erreichte BE

Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
3.1	Hauptbedingung: $V(b, h, l) = b \cdot h \cdot l$ soll maximal sein Nebenbedingungen: (NB1) $l = 2b$ (NB2) $4l + 4b + 4h = 540$ (NB1) in (NB2) einsetzen: $8b + 4b + 4h = 540 \Leftrightarrow h = 135 - 3b$ Nebenbedingungen in Hauptbedingung einsetzen: Zielfunktion: $V(b) = b \cdot (135 - 3b) \cdot 2b = 270b^2 - 6b^3$	1	2	1		
3.2	Ableitungen: $V'(b) = 540b - 18b^2$; $V''(b) = 540 - 36b$ Notw. Bed.: $V'(b) = 0 \Leftrightarrow 540b - 18b^2 = 0 \Leftrightarrow$ $b(540 - 18b) = 0$ Lösungen: $b_1 = 0$ ist nicht sinnvoll $b_2 = 30$ ist sinnvoll Hinreichende Bedingung $V''(b_2) < 0$ prüfen: $V''(30) = -540 < 0 \Rightarrow$ Maximum Optimale Höhe und Länge berechnen: $h_{\max} = 135 - 3 \cdot 30 = 45$ $l_{\max} = 2 \cdot 30 = 60$ Maximales Volumen berechnen: $V_{\max} = 30 \cdot 45 \cdot 60 = 81000$ Antwortsatz mit Maßeinheiten	1	1	1		
	Summe	3	11	1		
	mögliche BE	15			erreichte BE	

Teilaufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
4.1	<p>Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Parabel in ein Koordinatensystem zu zeichnen, exemplarisch sei hier nur die effektivste Variante aufgezeigt.</p> <p>Beide Parabeläste werden zu einer Parabel verbunden, so dass der Scheitelpunkt bei $S(0 0)$ liegt und ein weiterer relevanter Punkt bei $P(3 \frac{5}{2})$.</p>  <p><u>Funktionsgleichung:</u></p> $f(x) = ax^2 \quad P(3 \frac{5}{2})$ $\frac{5}{2} = 9a$ $a = \frac{5}{18}$ $f(x) = \frac{5}{18}x^2$					
					1	
					1	
					2	
					1	
					1	

4.2	<p><u>Ansatz für Flächeninhalt:</u></p> $A = 2 \int_0^3 f(x) dx = 2 \int_0^3 \left(\frac{5}{18} x^2\right) dx$ <p><u>Stammfunktion:</u></p> $F(x) = \frac{5}{54} x^3$ $A = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5m^2$ <p><u>Volumen:</u></p> $V = (A + 0,5 \cdot 10) \cdot \text{Breite} = 30m^3$ <p>30m³ Beton werden für den Bau der Halbpipeline benötigt.</p>	1	1	2		
4.3	$1m^3 \hat{=} 160Euro + 15\%$ $1m^3 \hat{=} 160Euro + 24Euro$ $1m^3 \hat{=} 184Euro$ $30m^3 \hat{=} 5520Euro$ <p>Das Geld der Sponsoren ist ausreichend.</p>	1	1			
4.4	$\frac{30m^3}{5520€} = \frac{x}{7000€} \quad x = 38,04m^3$ <p>Bei 38,04m³ Beton wäre das Geld voll ausgenutzt.</p> $38,04m^3 = (A + 0,5 \cdot 10) \cdot \text{Breite}$ $38,04m^3 = 10m^2 \cdot \text{Breite}$ $3,804m = \text{Breite}$ <p>Die Halbpipeline müsste um ca. 0,804 m verbreitert werden, damit das Geld voll ausgenutzt wird.</p>		1	1	1	
	Summe	6	12	2		
	mögliche BE	20			erreichte BE	