Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung   Berlin

Abschlussprüfung
an der Fachoberschule im Schuljahr 2010/2011

Fach	**Mathematik (B)**
Prüfungstag	6. Juni 2011
Prüfungszeit	09:00 - 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Mathematische Formelsammlungen (keine selbst angefertigten) ohne Musterlösungen, Taschenrechner ohne Graphikdisplay, keine CAS-Rechner, frei programmierbare Speicher müssen gelöscht sein. Das Handbuch muss vorliegen. Sollte Ihr Taschenrechner die Möglichkeit zum numerischen Differenzieren oder Integrieren bieten oder in der Lage sein, Gleichungen oder Gleichungssysteme zu lösen, dürfen Sie bei Ihren Lösungen davon keinen Gebrauch machen. Ihre Lösungswege sind so zu gestalten und zu dokumentieren, wie sie ohne diese Hilfsmittel durchgeführt werden. Bleistifte dürfen nur für Skizzen benutzt werden.
Allgemeine Arbeitshinweise	Die Reinschriften und Entwürfe sind nur auf den besonders gekennzeichneten Bögen anzufertigen, die Sie für die Prüfung erhalten. Diese sind zu nummerieren und sofort mit Ihrem Namen zu versehen. Für jede neue Aufgabe ist ein neuer gekennzeichneter Bogen zu beginnen. Schwerwiegende oder gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form führen zu einem **Abzug** von bis zu **einem Punkt** (Malus-Regelung). **Bedenken Sie die Folgen einer Täuschung oder eines Täuschungsversuchs!**
Spezielle Arbeitshinweise	Der Aufgabensatz besteht aus vier verschiedenen Einzelaufgaben, die Sie alle bearbeiten müssen!

Gesamtzahl der abgegebenen Lösungsblätter (Reinschrift):

Blätter

Bewertungseinheiten, und Gesamtpunkte und Gesamtnote[1]:

Aufgabe Nr.	**Soll % = BE**	**Ist % = BE**	**Ist (ggf. Zweitkorrektur)**
1	40		
2	15		
3	15		
4	30		
Summe:	100		
Notenpunkte:	15	____ Punkte	____ Punkte
Maluspunkt	-1	____ Punkt	____ Punkt
Insgesamt:		____**Punkte = Note[1]:**____	____**Punkte = Note[1]:**____
Datum, Unterschrift:			

[1] gilt nur für doppelt qualifizierende Bildungsgänge mit Fachhochschulreife

1 /40

Auf der Berliner Stadtautobahn A100 / Autobahndreieck Charlottenburg wurde über einen bestimmten Zeitraum die Staulänge l in Abhängigkeit von der Zeit t gemessen. Die Staulänge $l \geq 0$ kann näherungsweise durch die Funktion f mit

$f(t) = -\frac{1}{6}t^4 + 2t^2 - 1$; $t \in D_f$ dargestellt werden.

1 Längeneinheit ≙ 1 km, 1 Zeiteinheit ≙ 1 h

Foto: J. Lehnen

1.1 Berechnen Sie mit Hilfe einer Nullstellenberechnung die Gesamtdauer des Staus. **/7**

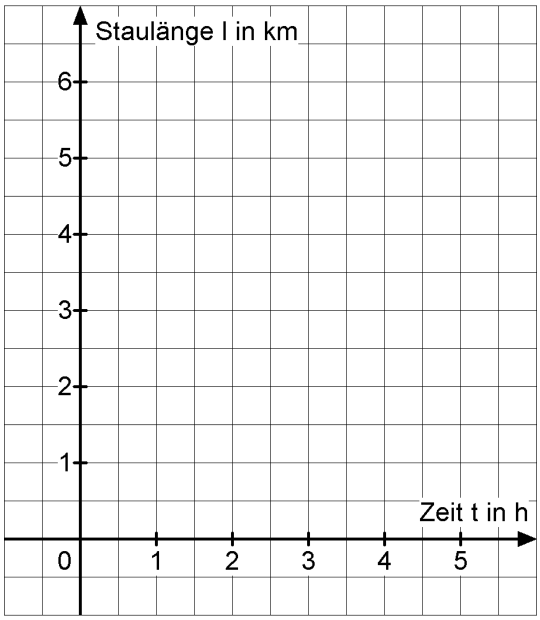
1.2 Berechnen Sie die Länge des Staus zum Zeitpunkt $t = 3$. Berechnen Sie, wie stark die Staulänge zu diesem Zeitpunkt pro Stunde steigt bzw. fällt. **/4**

1.3 Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die Staulänge am größten war. Berechnen Sie, wie lang der Stau zu diesem Zeitpunkt war. **/6**

1.4 Bestimmen Sie den Wendepunkt des Graphen von f und erläutern Sie die Bedeutung dieses Wendepunktes in Hinblick auf die Tendenz der Staulänge. **/7**

1.5 Bei Verkehrsdurchsagen werden nur noch Staulängen ab 1km Länge durchgegeben. Wann hat der Stau genau diese Länge und wieviel Zeit vergeht zwischen diesen beiden Zeitpunkten? **/9**

1.6 Zeichnen Sie den Graphen von f in das vorgegebene Koordinatensystem. **/4**



1.7 Beschreiben Sie anhand Ihrer graphischen Darstellung mit eigenen Worten den zeitlichen Verlauf des Staus. **/3**

2 /15

Die gesuchte Funktion f hat den Grad 3. Die Stelle $x_W = 2$ ist eine Wendestelle.

Die Orthogonale (Normale) im Wendepunkt $W(2 \mid f(2))$ hat die Steigung $m_O = \frac{1}{2}$.

Der Funktionsgraph hat im Punkt $H(3 \mid 2)$ ein lokales Maximum.

2.1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion. **/12**

Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie <u>ersatzweise</u> das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *der Funktion* f.

$$\begin{aligned}
4 &= 54a_3 + 18a_2 + 6a_1 + 2a_0 \\
0 &= 81a_3 + 18a_2 + 3a_1 \\
-1 &= 6a_3 + 2a_2 + 0{,}5a_1 \\
0 &= 6a_3 + a_2
\end{aligned}$$

2.2 Beschreiben Sie allgemein, wie Sie die Funktionsgleichungen der Orthogonale und der Tangente im Wendepunkt $W(2 \mid f(2))$ bestimmen würden. **/3**
(HINWEIS: Das können Sie auch tun, wenn Sie in 2.1 keine Funktionsgleichung bestimmen konnten.)

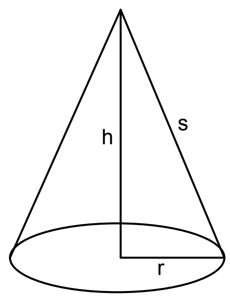
---

3 /15

Für eine Messehalle wird eine Werbefläche in Form eines geraden Kreiskegels geplant, der an zentraler Stelle auf dem Boden stehen soll.

Die Seitenlinie s des Kegels ist mit 3,6 m fest vorgegeben (siehe Skizze).

Der Kegel ist so zu gestalten, dass sein Volumen möglichst groß ist.



3.1 Weisen Sie nach, dass die Zielfunktion zur Bestimmung des Volumens wie folgt lautet: $V(h) = -\frac{\pi}{3}h^3 + 4{,}32\pi h$ **/6**

3.2 Wie sind Radius und Höhe zu wählen, wenn das Volumen des Kegels möglichst groß werden soll? **/7**

3.3 Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels. **/1**

3.4 Bestimmen Sie die Größe der Werbefläche. **/1**

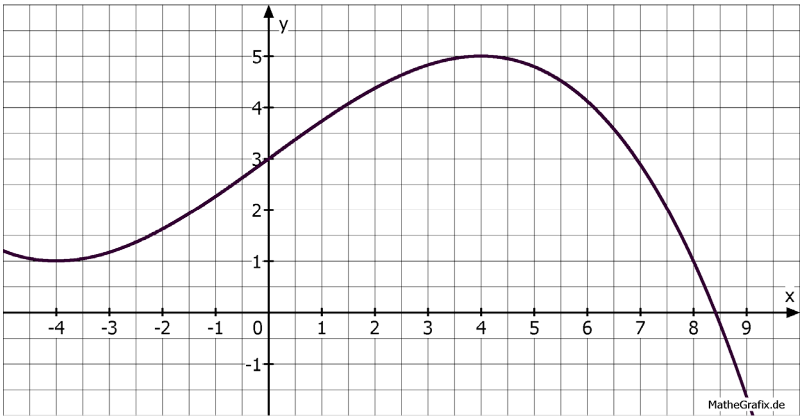
4 /30

Gegeben ist eine Funktion f

mit der Funktionsgleichung

$f(x) = -\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{4}x + 3$; $x \in \mathbb{R}$

und deren Graph.



4.1 Begründen Sie rechnerisch, dass die Funktion f im Intervall $[8;9]$ eine Nullstelle haben muss. **/8**

Berechnen Sie diese Nullstelle in 3 Iterationsschritten durch ein geeignetes Näherungsverfahren.

Machen Sie eine Aussage über die Genauigkeit Ihrer Lösung.

4.2 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A_1, die der Graph der Funktion f mit der x-Achse und der senkrechten Geraden an der Stelle $x = -4$ vollständig einschließt. **/6**

Rechnen Sie mit dem in 4.1 bestimmten Näherungswert.

Wenn Sie den Näherungswert nicht bestimmen konnten, lesen Sie die Nullstelle aus dem gegebenen Graphen ab.

4.3 Für welches $b > -4$ gilt: $\int_{-4}^{b} f(x)dx = 24$? **/7**

Berechnen Sie eine Lösung.

Begründen Sie die Existenz einer zweiten Lösung für b und beschreiben Sie die Lage.

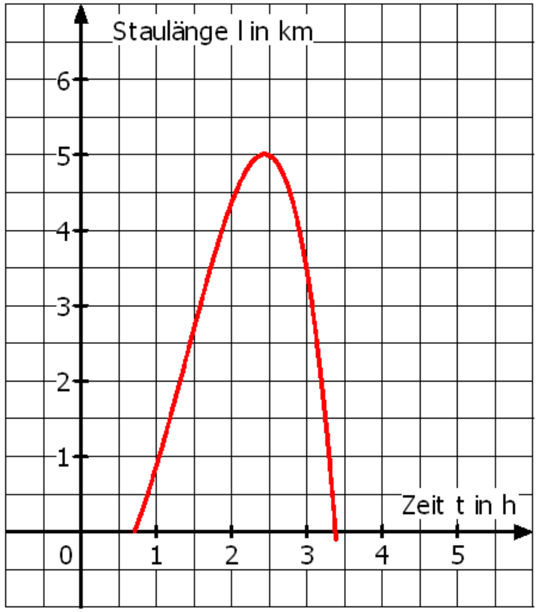
4.4 Gegeben ist die Gerade g mit $g(x) = 3$. **/9**

Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Funktionen f und g und bestimmen Sie den Inhalt der Fläche A_2, die von den beiden Graphen im 1. Quadranten eingeschlossen wird.

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

Aufg. 1	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
1.1	Nullstellen von f: $f(t)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}t^4+2t^2-1=0$ Substitution $z=t^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}z^2+2z-1=0 \Leftrightarrow z^2-12z+6=0$ $z_{1/2}=6\pm\sqrt{\frac{144}{4}-6}=6\pm\sqrt{30} \Rightarrow z_1=6+\sqrt{30}\,;\,z_2=6-\sqrt{30}$ $t_{1/2}=\pm\sqrt{z_1}\approx\pm3{,}39\,;\,t_{3/4}=\pm\sqrt{z_2}\approx\pm0{,}72$ t_2 und t_4 sind nicht zu berücksichtigen Gesamtdauer des Staus: $t_{gesamt}=t_1-t_3=2{,}66\,h$ Der Stau hat eine Gesamtdauer von 2,67 Stunden = 2h + 40min.	1 2 1	2 1			
1.2	$f(3)=-\frac{1}{6}\cdot3^4+2\cdot3^2-1=3{,}5$ Zum Zeitpunkt $t=3$ beträgt die Staulänge $l=3{,}5km$ Änderungsrate des Staus $f'(3)$: $f'(t)=-\frac{4}{6}t^3+4t \Rightarrow f'(3)=-\frac{4}{6}\cdot3^3+4\cdot3=-6$ Die Änderungsrate beträgt: $f'(3)=-6\frac{km}{h}$	1	3			
1.3 **Forts. ↓**	Extremum berechnen $f'(t)=0 \Leftrightarrow -\frac{4}{6}t^3+4t=0 \Leftrightarrow t\left(-\frac{2}{3}t^2+4\right)=0$ $t_1=0\,(nicht\ zu\ berücksichtigen)$	1	1			
	Zwischensumme Aufg. 1.1 bis 1.3 (1.Teil):	6	7	0		Übertrag ↴

Aufg. 1	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
	↳ Übertrag:	6	7	0		
Forts. 1.3	$-\frac{2}{3}t^2+4=0 \Leftrightarrow t^2=6 \Leftrightarrow t_{2/3}=\pm\sqrt{6}$ $t_2=\sqrt{6}\approx 2{,}449;\ t_3=-\sqrt{6}$ *(nicht zu berücksichtigen)*		2			
	$f''(t)=-2t^2+4 \Rightarrow f''\left(\sqrt{6}\right)=-8<0 \Rightarrow Hochpunkt$ $f\left(\sqrt{6}\right)=5 \Rightarrow$ Staulänge zum Zeitpunkt $t=\sqrt{6}$ betrug $l=5km$.		2			
1.4	Wendepunkt berechnen $f''(t)=0 \Leftrightarrow -2t^2+4=0 \Leftrightarrow t_{1/2}=\pm\sqrt{2}$ $t_1=\sqrt{2};\ t_2=-\sqrt{2}$ *(nicht zu berücksichtigen)*	3				
	$f'''(t)=-4t \Rightarrow f'''\left(\sqrt{2}\right)=-4\sqrt{2}<0 \Rightarrow Wendepunkt$ $f\left(\sqrt{2}\right)=2{,}\overline{3} \Rightarrow W\left(\sqrt{2}\,\middle\|\,2{,}\overline{3}\right)$		2			
	z.B. Die Staulängenänderung ist hier am größten oder Nach dem Wendepunkt wird die Zunahme des Staus geringer			2		
1.5	$f(t)=1 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}t^4+2t^2-1=1 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}t^4+2t^2-2=0$ Substitution: $z=t^2 \Rightarrow -\frac{1}{6}z^2+2z-2=0$ $z^2-12z+12=0 \Leftrightarrow z_{1/2}=6\pm\sqrt{\frac{144}{4}-12}=6\pm\sqrt{24}$ $\Rightarrow t_{1/2}=\pm\sqrt{z_1}\approx\pm 3{,}301; t_{3/4}=\pm\sqrt{z_2}\approx\pm 1{,}049$ Gesamtdauer der Verkehrsdurchsagen: $t_{gesamt}=t_1-t_3=2{,}252\ h$	4	2 1 2			
	Zwischensumme Aufg. 1.1 bis 1.5:	13	18	2		Übertrag ↴

Aufg. 1	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	Erbrachte Teilleistung BE	Erbrachte Teilleistung Begutachtung
	↳ Übertrag:	13	18	2		
1.6	graphische Darstellung 	4				
1.7	beispielhaft: 1) Der Stau beginnt 0,72 h ($\approx$43 min) nach Start der Zeitmessung. 2) Der Stau steigt sehr schnell an und erreicht eine maximale Länge von 5 km. 3) Insgesamt beträgt die Zeitdauer des Staus 2,66h ($\approx$2h + 40min).	3				
	Summe:	20	18	2		
	Summe:	40				**Erreichte BE Endsumme Aufgabe 1**

Aufg. 2	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
2.1	Ansatz: $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ $f''(x) = 6a_3x + 2a_2$	1				
	Bedingungsgefüge: 1. $x_W = 2$ ist Wendestelle: $f''(2) = 0 = 12a_3 + 2a_2$	1				
	2. $m_T = -2$ in W: $f'(2) = -2 = 12a_3 + 4a_2 + a_1$		2			
	3. H(3|2) ist Punkt auf G_f: $f(3) = 2 = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0$	1				
	4. H(3|2) ist Hochpunkt: $f'(3) = 0 = 27a_3 + 6a_2 + a_1$	1				
	Gleichungssystem: $2 = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0$ $0 = 27a_3 + 6a_2 + a_1$ $-2 = 12a_3 + 4a_2 + a_1$ $0 = 12a_3 + 2a_2$		1			
	$a_3 = \frac{2}{3}$; $a_2 = -4$; $a_1 = 6$; $a_0 = 2$		4			
	$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + 2$	1				
2.2	Das Verfahren muss sinngemäß so beschrieben werden: Aus W und m_T folgt $y_W = m_T x_W + b_T \Rightarrow b_T = y_W - m_T x_W$ Aus W und m_O folgt $y_W = m_O x_W + b_O \Rightarrow b_O = y_W - m_O x_W$		3			
	Summe:	5	10	0	▾	
	Summe:	15				**Erreichte BE Endsumme Aufgabe 2**

Aufg. 3	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
3.1	HB: $V(r,h)=\frac{1}{3}\pi r^2 h$		1			
	NB: $s^2 = r^2 + h^2$ $r^2 = s^2 - h^2 = 3{,}6^2 - h^2$		1 1			
	ZF: $V(h)=\frac{1}{3}\pi(s^2-h^2)h=\frac{3{,}6^2}{3}\pi h-\frac{1}{3}\pi h^3$ $V(h)=-\frac{1}{3}\pi h^3+4{,}32\pi h$		2	1		
3.2	$V'(h)=-\pi h^2+4{,}32\pi=0$ $h_{1/2}=\pm\sqrt{4{,}32}\approx\pm 2{,}08$ Die negative Lösung ist nicht sinnvoll i.S.d.A.	1	2			
	$V''(h)=-2\pi h$ $V''(2{,}08)=-13{,}07<0$ => Maximum bei h_1		1 1			
	$r_1^2 = s^2 - h_1^2 = 3{,}6^2 - 2{,}08^2 \Rightarrow r_1 = 2{,}94$ Der Radius muss ca. 2,94 m betragen.		2			
3.3	$V(r,h)=\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = 18{,}83$ Das Volumen beträgt ca. 18,83 m^3.	1				
3.4	$A=\pi r_1 s = 33{,}25$ Die Größe der Werbefläche beträgt ca. 33,25 m^2.	1				
	Summe:	3	11	1		
	Summe:	15				**Erreichte BE Endsumme Aufgabe 3**

<table>
<tr><th rowspan="2">Aufg. 4</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th><th colspan="2">Erbrachte Teilleistung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>BE</th><th>Begutachtung</th></tr>
<tr><td rowspan="4">4.1</td><td>Es gibt eine Nullstelle im Intervall [8;9], da ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte im Intervall auftritt, denn $f(8)=1$ und $f(9)=-1,6406$</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>mögliche Lösung mit dem Newtonschen Näherungsverfahren
$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
$f'(x)=-\dfrac{3}{64}x^2+\dfrac{3}{4}$</td><td>1
1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td><table>
<tr><th>x_n</th><th>$f(x_n)$</th><th>$f'(x_n)$</th><th>x_{n+1}</th></tr>
<tr><td>8,5</td><td>-0,220703</td><td>-2,636719</td><td>8,416296</td></tr>
<tr><td>8,416296</td><td>-0,002782</td><td>-2,570346</td><td>8,415214</td></tr>
<tr><td>8,415214</td><td>-0,0000005</td><td>-2,569492</td><td>8,415214</td></tr>
</table></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Die Nullstelle liegt bei. $x_n \approx 8,415214$.
Genauigkeit: z. B. 6 Nachkommastellen stimmen überein.</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>Ansatz für Flächeninhalt:
$A_1=\int_{-4}^{8,4152} f(x)dx=\int_{-4}^{8,4152}(-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{4}x+3)dx$
Stammfunktion: $F(x)=-\frac{1}{256}x^4+\frac{3}{8}x^2+3x$
$A_1=F(8,4152)-F(-4)=32,2122-(-7)=39,2122FE$</td><td>1

2</td><td>1
1
1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Zwischensumme Aufg. 4.1 bis 4.3:</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td><td></td><td>Übertrag ↴</td></tr>
</table>

Aufg. 4	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
	↳ Übertrag:	6	6	2		
4.3	Aus $\int_{-4}^{b} f(x)dx = 24$ folgt $F(b) - F(-4) = 24 \Leftrightarrow -\frac{1}{256}b^4 + \frac{3}{8}b^2 + 3b - 17 = 0$		2			
	Ermittlung der ersten Lösung b = 4 durch ein geeignetes Verfahren, z.B. durch Probieren in Kombination mit Flächenabschätzung	2				
	Eine weitere Lösung für b müsste größer als 8,4152 (siehe 4.1) sein			1		
	und $39,2122 + \int_{8,4152}^{b} f(x)dx = 24$ (Der Integralwert ist negativ, da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt.)			2		
4.4	a) Schnittpunkte berechnen: Aus $f(x) = g(x)$ folgt $-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{4}x = x(-\frac{1}{64}x^2 + \frac{3}{4}) = 0$	2				
	$x_1 = 0; x_2 = \sqrt{48} \approx 6,93$ und $x_3 = -\sqrt{48} \approx -6,93$		2			
	Schnittpunkte: $P_1(0/3); P_2(6,93/3); P_3(-6,93/3)$	1				
	b)Flächenberechnung: $A_2 = \int_0^{\sqrt{48}} (f(x) - g(x))dx = \int_0^{\sqrt{48}} (-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{4}x)dx$		2			
	Stammfunktion: $D(x) = -\frac{1}{256}x^4 + \frac{3}{8}x^2$	1				
	$A_2 = D(\sqrt{48}) = 9FE$		1			
	Summe:	12	13	5	▾	
	Summe:	30				**Erreichte BE Endsumme Aufgabe 4**