



Abschlussprüfung an der Fachoberschule im Schuljahr 2023/2024

Fach	Mathematik (B)
Nur für die Lehrkraft	
Prüfungstag	29.05.2024
Prüfungszeit	09:00 – 13:00 Uhr
Zugelassene Hilfsmittel	Nicht graphikfähiger Taschenrechner mit gelöschtem Programmerteil, kein CAS-Rechner, Handbuch/Gebrauchsanleitung muss vorliegen, Formelsammlung, Rechtschreib-Wörterbuch (siehe Aufgabendeckblatt)
Allgemeine und spezielle Arbeitshinweise	Beachten Sie bitte das Schülerdeckblatt.
Erwartungshorizonte	Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungen, sondern nur kurze Angaben. Hier nicht genannte, aber gleichwertige Lösungswege sind gleichberechtigt. Die aufgeführten Lösungswege zeigen immer nur eine Variante auf. Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die schlüssig dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten (BE) entsprechend zu vergeben. Wird jedoch der im Erwartungshorizont dargestellte Lösungsweg vom Prüfling verwendet, so sind die BE in der angegebenen Weise aufzuteilen. Damit die Möglichkeit besteht, den eigenen didaktischen Aspekten bei der Bewertung genug Raum zu geben, werden in der Regel die BE nicht kleinschrittig zugeordnet. Die Summe der BE pro Teilaufgabe ist verbindlich. Sind Zwischenergebnisse nicht korrekt ermittelt worden und die sich auf diesen Zwischenergebnissen aufbauenden weiteren Lösungswege schlüssig und nicht mit neuen Fehlern versehen, so sind die BE entsprechend zu erteilen (Folgefehler). Dieses Vorgehen ist nicht anzuwenden, wenn eine offensichtlich nicht sinnvolle Lösung unkommentiert bleibt oder der Lösungsweg durch den Fehler erheblich einfacher geworden ist. Die Verwendung von entsprechenden Operatoren in den Aufgabenstellungen erfordert vom Prüfling schriftliche Erläuterungen seiner Überlegungen. Bei der Bewertung dieser Erläuterungen, auf deren Darstellung im Erwartungshorizont weitgehend verzichtet wird, kann die Lehrkraft ihren pädagogischen Spielraum nutzen und sich an ihrer bisherigen Unterrichtspraxis orientieren. Im Erwartungshorizont wird teilweise auf formale mathematische Vollständigkeit verzichtet, wenn diese vom Schüler in der Regel nicht unbedingt zu erwarten ist.

Aufgabe Nr.	Soll
1	40
2	30
3	30
Summe:	100

1 Funktionsuntersuchung

/40

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + x^2 + 16 ; x \in \mathbb{R}$$

Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.

- 1.1** Begründen Sie, dass der Graph von f achsensymmetrisch zur y -Achse ist.
 Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen an.

/3
- 1.2** Berechnen Sie alle Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

/7
- 1.3** Ermitteln Sie die Lage und Art der Extrempunkte des Graphen von f .
 [Zur Kontrolle: Ein Hochpunkt liegt bei $H_1(-2|18)$.]

/8
- 1.4** Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen von f .

/5
- 1.5** Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle.

/5

x	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5
$f(x)$	9,49			16,24	16,24			9,49

Zeichnen Sie den Graphen von f in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite**.

Kennzeichnen und benennen Sie am Graphen von f alle Punkte, die Sie in den Aufgaben 1.2 bis 1.4 bestimmt haben.

Es ist eine weitere Funktion g gegeben, die den Graphen von f in seinen Hochpunkten schneidet. Sie hat die Funktionsgleichung

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + 6x ; a, b, x \in \mathbb{R}$$

- 1.6** Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Funktion g .
 [Zur Kontrolle: $a = -1,5$ und $b = 4,5$]

/5

Fortsetzung auf der nächsten Seite

- 1.7** Zeigen Sie, dass man die Gleichung $f(x) = g(x)$ in die folgende Gleichung umformen kann: **/2**

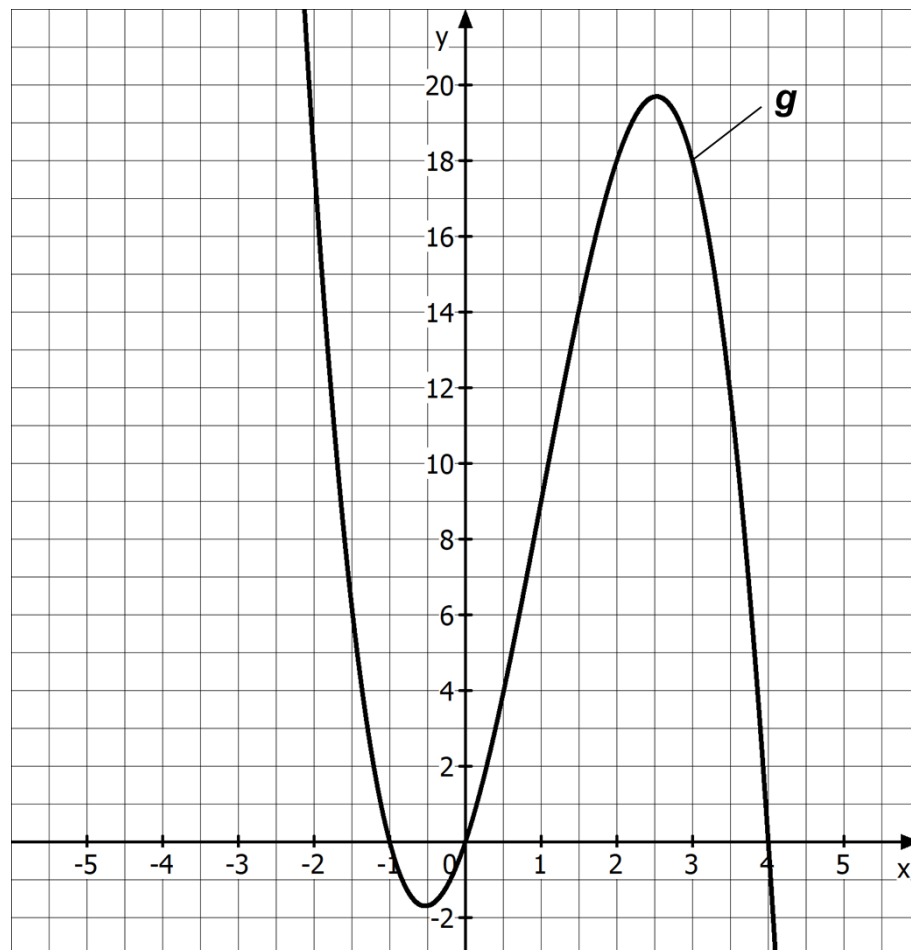
$$x^4 - 12x^3 + 28x^2 + 48x - 128 = 0$$

- 1.8** Durch eine Polynomdivision mit $(x - 4)$ bzw. das Anwenden des Hornerschemas mit $x = 4$ erhält man **/5**

$$\frac{x^4 - 12x^3 + 28x^2 + 48x - 128}{(x - 4)} = x^3 - 8x^2 - 4x + 32$$

Ermitteln Sie mit Hilfe dieser Gleichung die Koordinaten des Schnittpunkts der Graphen von f und g , der im 4. Quadranten liegt.

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.5:



2 Integralrechnung

/30

Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen

$$f(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 16; x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{1}{10}x^3 - \frac{22}{10}x^2 - \frac{177}{10}x - 42; x \in \mathbb{R}$$

Die Graphen von f und g sind in Abbildung 1 dargestellt.

2.1 Zeigen Sie, dass $S_1(-10|15)$ ein gemeinsamer Punkt der Graphen von f und g ist. /2

2.2 Die Geraden $x = -4$ und $x = 4$, die x -Achse und der Graph von f schließen die Fläche A_1 ein. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche A_1 . /4

2.3 Es gilt: $g(-4) = 0$.

Der Graph von g , die Gerade $x = -4$ und der Graph von f schließen die Fläche A_2 ein.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche A_2 .

2.4 Der Graph einer quadratischen Funktion p besitzt die Nullstellen $x_{N1} = 4$ und $x_{N2} = 20$ sowie den Scheitelpunkt $S(12|16)$. Der Graph von p ist in Abbildung 1 skizziert.

Ermitteln Sie eine Gleichung der quadratischen Funktion p .

2.5 In der Abbildung 1 ist der Schnittpunkt S_2 der Graphen von f und p eingezeichnet. Berechnen Sie die x -Koordinate des Schnittpunktes S_2 . /5

[Hinweis: Verwenden Sie $p(x) = -0,25x^2 + 6x - 20$, falls Sie 2.4 nicht lösen konnten.]

2.6 Der Graph von p , die Gerade $x = 4$ und der Graph von f schließen die Fläche A_3 ein. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche A_3 . /5

Das Logo eines Holzfällergeschäfts ist eine Axt. Das Blatt der Axt wird oberhalb der x -Achse durch die Graphen der Funktionen f , g und p begrenzt. Weiterhin gehört zu dem Axtblatt auch eine rechteckige Fläche, die unterhalb der x -Achse (siehe Abbildung 2). Die rechteckige Fläche A_4 liegt im Intervall $[-4; 4]$ und ist 6 LE hoch.

Es gilt der Maßstab 1 LE = 1 cm.

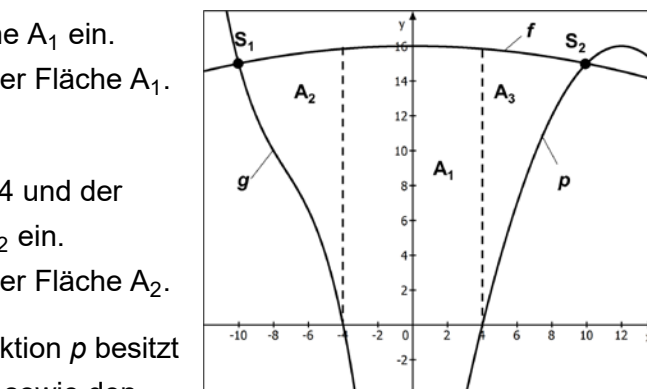


Abbildung 1

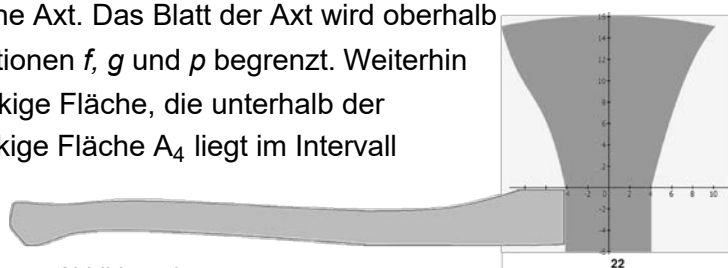


Abbildung 2

2.7 Für das Logo wird das Axtblatt aus einem quadratischen Blech mit einer Seitenlänge von 22 cm herausgeschnitten. Die abgetrennte Fläche gilt als Verschnitt. /5

Prüfen Sie, ob der Verschnitt weniger als 45 % beträgt.

[Hinweis: Verwenden Sie die Werte $A_1 = 127,57$ FE; $A_2 = 44,28$ FE; $A_3 = 38,88$ FE, falls Sie die Flächen A_1 bis A_3 nicht berechnen konnten.]

3 Stochastik**/30**

Die Firma ECOTec hat 70 Angestellte, von denen 42 mit dem Auto zur Arbeit fahren. Diese werden im Folgenden als Autofahrer bezeichnet.

Die übrigen Angestellten kommen ohne Auto zur Arbeit.

Die Firma möchte ihre Angestellten motivieren, die öffentlichen Verkehrsmittel zu nutzen. Dazu werden von den 70 Angestellten jeden Monat drei Angestellte zufällig ausgewählt, die einen Gutschein für die öffentlichen Verkehrsmittel erhalten.

3.1 Erstellen Sie ein Baumdiagramm mit allen Zweigwahrscheinlichkeiten für dieses Auswahlverfahren. Benennen Sie die von Ihnen verwendeten Abkürzungen. **/7**

3.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse. **/8**

Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten in Prozent an.

E_1 : „Es werden nur Autofahrer ausgewählt.“

E_2 : „Es werden nur Angestellte ausgewählt, die ohne Auto zur Arbeit fahren.“

E_3 : „Es wird genau ein Autofahrer ausgewählt.“

E_4 : „Es werden mehr Autofahrer ausgewählt als Angestellte, die ohne Auto zur Arbeit fahren.“

3.3 60 % der Angestellten der Firma ECOTec sind Pendler von außerhalb. Die anderen wohnen in der Stadt, pendeln also nicht. Unter den Angestellten, die nicht pendeln, beträgt der Anteil der Autofahrer ein Viertel. Berechnen Sie den Anteil der Autofahrer unter den Pendlern. **/4**

In einer anderen Firma sind von den Angestellten 440 Autofahrer. Von den Autofahrern besitzen 25 % ein Elektroauto, die anderen ein Verbrenner-Auto. 60 % der Elektroautos und 30 % der Verbrenner-Autos sind Kleinwagen. Der Rest sind Mittelklassewagen.

3.4 Erstellen Sie eine Vierfeldertafel, die den Sachverhalt darstellt. Benennen Sie die von Ihnen verwendeten Abkürzungen. **/6**

3.5 Aus der Gruppe der Mittelklassewagen wird ein Auto zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dabei um ein Elektroauto handelt. **/2**

3.6 Ein Angestellter dieser anderen Firma, der mit dem Auto zur Arbeit kommt, wird zufällig ausgewählt. **/3**

Betrachtet werden die Ereignisse:

E : „Der ausgewählte Angestellte fährt ein Elektroauto.“

M : „Der ausgewählte Angestellte fährt einen Mittelklassewagen.“

Untersuchen Sie, ob die Ereignisse E und M stochastisch unabhängig sind.



Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.1	Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y -Achse, da in der Funktionsgleichung nur gerade Exponenten auftreten. Für $x \rightarrow -\infty$ gilt $f(x) \rightarrow -\infty$. Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $f(x) \rightarrow -\infty$.	3		
1.2	$f(0) = 16$; $S_y(0 16)$ $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + x^2 + 16$ Substitution: $z = x^2$ $0 = -\frac{1}{8}z^2 + z + 16$ $0 = z^2 - 8z - 128$ $z_{1/2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 + 128} = 4 \pm 12$ $z_1 = -8$ und $z_2 = 16$ Rücksubstitution: z_1 liefert keine Nullstelle, da $z_1 < 0$ $x_{N1/N2} = \pm \sqrt{z_2}$ $x_{N1} = -4$; $N_1(-4 0)$ und $x_{N2} = 4$; $N_2(4 0)$	1		
1.3	Bed.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$ $f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x$ $f''(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2$ $f'(x) = 0 = -\frac{1}{2}x(x^2 - 4)$ 1. Faktor: $x_{E1} = 0$ $f''(0) = 2 > 0$; also Tiefpunkt ; $f(0) = 16$; $T(0 16)$ 2. Faktor: $0 = x^2 - 4$ $x_{E2/E3} = \pm \sqrt{4}$ $x_{E2} = -2$ und $x_{E3} = 2$ $f''(-2) = -4 < 0$, also Hochpunkt ; $f(-2) = 18$; $H_1(-2 18)$ $f''(2) = -4 < 0$, also Hochpunkt ; $f(2) = 18$; $H_2(2 18)$ Alternative Begründungen für H_2 sind möglich.			
			6	
				8

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB																				
		I	II	III																		
1.4	Bed.: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ $f'''(x) = -3x$ $f''(x) = 0 = -\frac{3}{2}x^2 + 2$ $\frac{3}{2}x^2 = 2$ $x^2 = \frac{4}{3}$ $x_{W1/W2} = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$ $x_{W1} \approx -1,15$ und $x_{W2} \approx 1,15$ $f'''(-1,15) = -f'''(1,15) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkte $f(-1,15) \approx 17,1; W_1(-1,15 17,1)$ $f(1,15) \approx 17,1; W_2(1,15 17,1)$ Alternative Begründungen für W_2 sind möglich.																					
1.5	<table border="1"><tr><td>x</td><td>-3,5</td><td>-2,5</td><td>-1,5</td><td>-0,5</td><td>0,5</td><td>1,5</td><td>2,5</td><td>3,5</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>9,49</td><td>17,37</td><td>17,62</td><td>16,24</td><td>16,24</td><td>17,62</td><td>17,37</td><td>9,49</td></tr></table> Punkte markieren und benennen.	x	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	f(x)	9,49	17,37	17,62	16,24	16,24	17,62	17,37	9,49	1		
x	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5														
f(x)	9,49	17,37	17,62	16,24	16,24	17,62	17,37	9,49														
			4																			

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.6	$H_1(-2 18)$ und $H_2(2 18)$ führen zu den Gleichungen I) $18 = -8a + 4b - 12$ II) $18 = 8a + 4b + 12$ Addition der beiden Gleichungen liefert $b = \frac{9}{2}$ und damit $a = -\frac{3}{2}$ $g(x) = -\frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 6x$			5
1.7	$f(x) = g(x)$ $-\frac{1}{8}x^4 + x^2 + 16 = -\frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 6x$ $x^4 - 8x^2 - 128 = 12x^3 - 36x^2 - 48x$ $x^4 - 12x^3 + 28x^2 + 48x - 128 = 0$	2		
1.8	Polynomdivision oder HornerSchema: z. B. $H_1(-2 18) \rightarrow x_{S2} = -2$ Restpolynom: $x^2 - 10x + 16 = 0$ oder $H_2(2 18) \rightarrow x_{S2} = 2$ Restpolynom: $x^2 - 6x - 16 = 0$ p-q-Formel: $x_{S3} = 2$ und $x_{S4} = 8$ oder $x_{S3} = -2$ und $x_{S4} = 8$ $S(8 -432)$		5	
	Mögliche BE	7	28	5
	Summe Aufgabe	40		

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.1	$f(-10) = 15$ $g(-10) = 15$ $\Rightarrow S_1(-10 15)$ ist ein Schnittpunkt von f und g	2		
2.2	$A_1 = \int_{-4}^4 f(x) dx = 2 \cdot \int_0^4 \left(-\frac{1}{100}x^2 + 16\right) dx$ $= 2 \cdot \left[-\frac{1}{300}x^3 + 16x\right]_0^4 \approx 2 \cdot (63,79) - 0 = 127,57 \text{ FE}$	4		
2.3	$A_2 = \int_{-10}^{-4} (f(x) - g(x)) dx = \int_{-10}^{-4} \left(\frac{1}{10}x^3 + \frac{219}{100}x^2 + \frac{177}{10}x + 58\right) dx$ $= \left[\frac{1}{40}x^4 + \frac{73}{100}x^3 + \frac{177}{20}x^2 + 58x\right]_{-10}^{-4} = (-130,72) - (-175) = 44,28 \text{ FE}$		5	
2.4	$p(x) = a(x - 12)^2 + 16$ Mit $N_1(4 0)$ folgt: $p(4) = 0 = a(4 - 12)^2 + 16$ $a = -\frac{1}{4}$ $p(x) = -\frac{1}{4}(x - 12)^2 + 16 = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 20$		4	
2.5	Bed.: $f(x) = p(x)$ $f(x) - p(x) = 0$ $0 = -\frac{1}{100}x^2 + 16 + \frac{1}{4}x^2 - 6x + 20$ $0 = x^2 - 25x + 150$ $x_{S1/S2} = \frac{25}{2} \pm \frac{5}{2}$ $x_{S1} = 15 \rightarrow$ laut Aufgabenstellung nicht relevant. $x_{S2} = 10$		5	
2.6	$A_3 = \int_4^{10} (f(x) - p(x)) dx = \int_4^{10} \left(\frac{6}{25}x^2 - 6x + 36\right) dx$ $= \left[\frac{2}{25}x^3 - 3x^2 + 36x\right]_4^{10} = (140) - (101,12) = 38,88 \text{ FE}$		5	

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.7	$A_4 = h \cdot b = 8 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2$ $A_G = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ $A_G = (127,57 + 44,28 + 38,88 + 48) \text{ cm}^2 = 258,73 \text{ cm}^2$ $A_{\text{Blech}} = a^2 = (22 \text{ cm})^2 = 484 \text{ cm}^2$ $p = \frac{A_{\text{Blech}} - A_G}{A_{\text{Blech}}} \cdot 100 \%$ $p = \frac{484 - 258,73}{484} \cdot 100 \% \approx 46,54 \%$ Beim Ausschneiden des Axtblattes fällt mehr als 45 % Verschnitt an.			5
	Mögliche BE	6	19	5
	Summe Aufgabe	30		

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB																		
		I	II	III																
3.1	A – Autofahrer, $\bar{A}$ – nicht Autofahrer		7																	
3.2	$P(E_1) = P(\{AAA\}) = \frac{42}{70} \cdot \frac{41}{69} \cdot \frac{40}{68} = \frac{82}{391} \approx 0,210 = 21,0 \%$ $P(E_2) = P(\{\bar{A}\bar{A}\bar{A}\}) = \frac{28}{70} \cdot \frac{27}{69} \cdot \frac{26}{68} = \frac{117}{1955} \approx 0,060 = 6,0 \%$ $P(E_3) = P(\{\bar{A}\bar{A}A; \bar{A}A\bar{A}; A\bar{A}\bar{A}\}) = 3 \cdot \frac{42}{70} \cdot \frac{28}{69} \cdot \frac{27}{68} = \frac{567}{1955} \approx 0,290 = 29,0 \%$ $P(E_4) = P(\{AAA; \bar{A}\bar{A}\bar{A}; A\bar{A}\bar{A}; \bar{A}A\bar{A}\})$ $= \frac{42}{70} \cdot \frac{41}{69} \cdot \frac{40}{68} + 3 \cdot \frac{28}{70} \cdot \frac{42}{69} \cdot \frac{41}{68} = \frac{1271}{1955} \approx 0,650 = 65,0 \%$	4		4																
3.3	Lösung z. B. über eine Vierfeldertafel: A – Autofahrer; P – Pendler <table border="1"> <tr> <td></td> <td>P</td> <td>$\bar{P}$</td> <td>Σ</td> </tr> <tr> <td>A</td> <td>35</td> <td>7</td> <td>42</td> </tr> <tr> <td>$\bar{A}$</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Σ</td> <td>42</td> <td>28</td> <td>70</td> </tr> </table> Anteil der Autofahrer unter den Pendlern: $h_P(A) = \frac{35}{42} = \frac{5}{6}$		P	$\bar{P}$	Σ	A	35	7	42	$\bar{A}$				Σ	42	28	70			4
	P	$\bar{P}$	Σ																	
A	35	7	42																	
$\bar{A}$																				
Σ	42	28	70																	

Teil- aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB																		
		I	II	III																
3.4	Legende: K – Kleinwagen; M – Mittelklassewagen; V – Verbrenner-Auto; E – Elektroauto <table><tr><td></td><td>V</td><td>E</td><td>Σ</td></tr><tr><td>K</td><td>99</td><td>66</td><td>165</td></tr><tr><td>M</td><td>231</td><td>44</td><td>275</td></tr><tr><td>Σ</td><td>330</td><td>110</td><td>440</td></tr></table>		V	E	Σ	K	99	66	165	M	231	44	275	Σ	330	110	440	6		
	V	E	Σ																	
K	99	66	165																	
M	231	44	275																	
Σ	330	110	440																	
3.5	$P_M(E) = \frac{44}{275} = \frac{4}{25} = 0,16 = 16 \%$		2																	
3.6	Es gilt z. B.: $P(M) = \frac{275}{440} = 62,5 \%$ und $P_E(M) = \frac{44}{110} = 40 \%$ Die Wahrscheinlichkeiten sind nicht gleich, also sind die Ereignisse stochastisch abhängig.			3																
	Mögliche BE	10	13	7																
	Summe Aufgabe	30																		