LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife
im Schuljahr 2023/2024

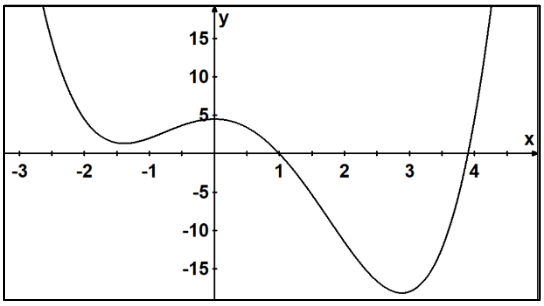
Mathematik B

08. Mai 2024 – 09:00 Uhr

Unterlagen für die Lehrkraft

1. Aufgabe: Differentialrechnung

Die Darstellung zeigt die wesentlichen Verlaufsmerkmale des Graphen G_g einer ganzrationalen Funktion g.



a) Entscheiden und begründen Sie anhand des abgebildeten Graphen, ob g eine Funktion zweiten, dritten oder vierten Grades ist.

Skizzieren Sie in der Abbildung die Lage der Wendepunkte von G_g.

b) Begründen Sie kurz mit Hilfe der in der Abbildung erkennbaren Merkmale, …

(I) … dass der Funktionswert g(1) nicht negativ ist.
(II) … dass die erste Ableitung von g an der Stelle x = 1 ungleich 0 ist.
(III) … dass die Stelle x = 0 keine Sattelstelle ist.
(IV) … dass die zweite Ableitung von g an der Stelle x = 3 positiv ist.

Gegeben ist nun eine andere ganzrationale Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{5}x^4 - 2x^3$; $x \in \mathrm{IR}$.
Der Graph der Funktion heißt G_f.

c) Ermitteln Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.

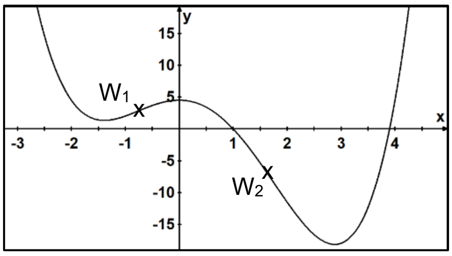
d) Notieren Sie die Gleichungen der ersten drei Ableitungsfunktionen von f.
Prüfen Sie, ob der Punkt P(3 | –21,6) auf G_f liegt und ob P ein Extrempunkt ist.

e) Weisen Sie nach, dass G_f Wendepunkte besitzt und berechnen Sie deren Koordinaten.
Zeigen Sie, dass einer der Wendepunkte gleichzeitig auch ein Sattelpunkt ist.

f) Geben Sie alle Intervalle an, in denen G_f linksgekrümmt verläuft.

g) Erstellen Sie für die Funktion f eine Wertetabelle für das Intervall $-3 \le x \le 4$ in Einerschritten.
Skizzieren Sie G_f anhand der Wertetabelle in diesem Intervall in ein kartesisches Koordinatensystem.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
Punkte	3	4	5	5	7	2	4	30

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1a)	Begründungsbeispiel: Es handelt sich bei g um eine Funktion vierten Grades, weil der abgebildete Graph von g 3 Extrempunkte besitzt.  	2 1
1b)	(I) Die Funktion g besitzt bei x = 1 eine Nullstelle, somit ist g(1) = 0 und nicht negativ. (II) An der Stelle x = 1 verläuft G_g fallend, somit ist $g'(1) < 0$. (III) An der Stelle x = 0 verläuft G_g rechtsgekrümmt, somit kann es keine Sattelstelle sein. (IV) An der Stelle x = 3 besitzt G_g eine Linkskrümmung, somit muss $g''(3) > 0$ sein.	4
1c)	$S_y = S_{x1}(0 \mid 0)$ $f(x) = x^3 \cdot \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}x - 2\right) = 0$; $x_1 = 0$ $x^2 - x - 10 = 0$ $x_2 \approx 3{,}70$ und $x_3 \approx -2{,}70$ $S_{x2}(3{,}7 \mid 0)$ und $S_{x3}(-2{,}7 \mid 0)$	1 4
1d)	$f'(x) = x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 6x^2$ $f''(x) = 4x^3 - \frac{12}{5}x^2 - 12x$ $f'''(x) = 12x^2 - \frac{24}{5}x - 12$ $f(3) = -21{,}6$ Der Punkt P liegt auf G_f. $f'(3) = 5{,}4 \neq 0$ Somit kann P kein Extrempunkt sein.	3 2
1e)	$f''(x) = x \cdot (4x^2 - \frac{12}{5}x - 12) = 0$; $x_1 = 0$ $x^2 - \frac{3}{5}x - 3 = 0$ $x_2 \approx 2{,}06$ und $x_3 \approx -1{,}46$ $f'''(0) = -12 \neq 0$; $f(0) = 0$; $W_1 = S_y(0 \mid 0)$ $f'''(2{,}06) \approx 29{,}04 \neq 0$; $f(2{,}06) \approx -13{,}67$; $W_2(2{,}06 \mid -13{,}67)$ $f'''(-1{,}46) \approx 20{,}59 \neq 0$; $f(-1{,}46) \approx 3{,}99$; $W_3(-1{,}46 \mid 3{,}99)$ $f'(0) = 0$ W_1 ist somit ein Sattelpunkt.	3 3 1

1f) Intervalle mit Linkskrümmung des Graphen G_f:

$-1{,}46 < x < 0$

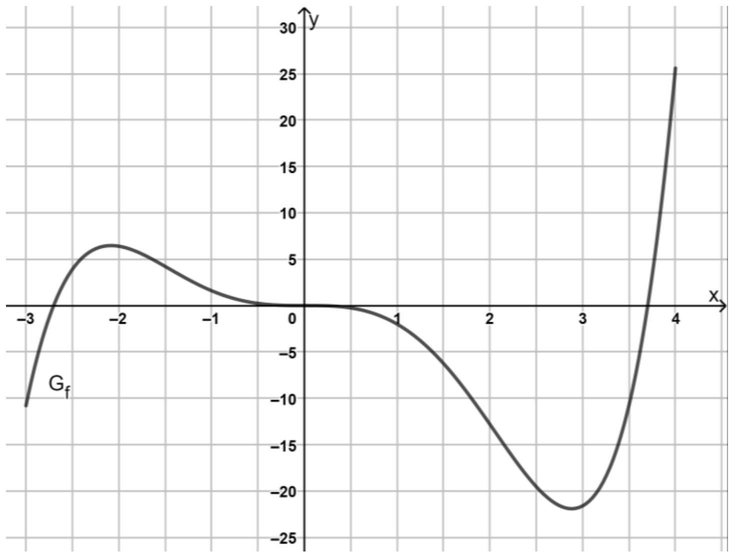
$2{,}06 < x < \infty$

2

1g) Wertetabelle:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–10,8	6,4	1,6	0	–2	–12,8	–21,6	25,6

1



3

Summe 30

2. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung

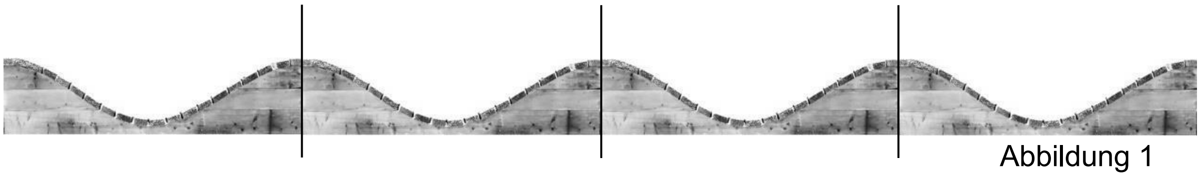


Abbildung 1

Für den Bau eines Holzstegs in einer neuen Freizeitanlage werden vier wellenförmige Bauelemente benötigt. Die Seitenteile jedes Bauelements werden jeweils aus einer Holzplatte angefertigt (siehe Abbildung 1).

Die obere Begrenzung eines Seitenteils lässt sich mit dem Graphen G_f der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$; $x \in \mathbb{R}$ darstellen.

Die untere Begrenzung eines Seitenteils lässt sich mit dem Graphen G_g der Funktion g mit $g(x) = \frac{3}{10}$; $x \in \mathbb{R}$ darstellen.

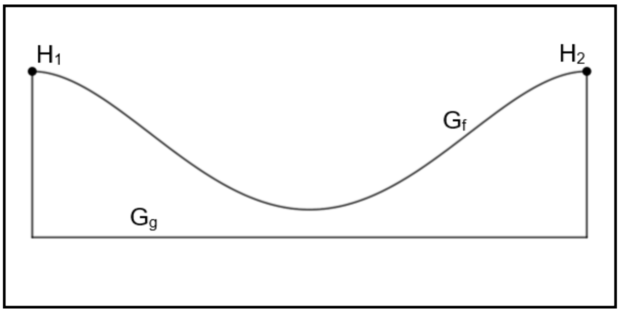


Abbildung 2

Die seitlichen Begrenzungen verlaufen senkrecht durch die Hochpunkte H_1 und H_2 des Graphen G_f.

Eine Längeneinheit entspricht 0,5 m in der Wirklichkeit.

a) Begründen Sie, dass der Graph G_f achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft.

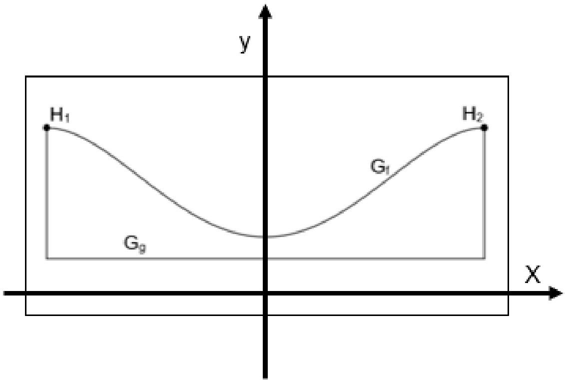
Skizzieren Sie **in die Abbildung 2** die Lage der beiden Achsen eines geeigneten kartesischen Koordinatensystems.

b) Ermitteln Sie die Art und die vollständigen Koordinaten der Extrempunkte von G_f.

c) Geben Sie den Höhenunterschied zwischen Bergen und Tälern der Welle in m an. Berechnen Sie die maximale Höhe und die Breite eines Seitenteils in m.

d) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Flächeninhalt eines Seitenteils etwa 0,67 m² beträgt.
Mit 1 Liter Holzschutzmittel können 3 m² gestrichen werden. Bestimmen Sie, für wie viele Seitenteile ein 5 Liter-Kanister bei einseitigem Anstrich reichen würde.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	3	8	3	6	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)	Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da nur gerade Exponenten von x in der Funktionsgleichung vorhanden sind, bzw. weil gilt $f(x) = f(-x)$. 	1 2
2b)	$f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x$; $f''(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 1$ $0 = x \cdot \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1\right)$; $x_1 = 0$ $0 = -\frac{1}{4}x^2 + 1$; $x_{2/3} = \pm 2$ $f''(0) = 1 > 0 \rightarrow TP$; $f(0) = 0{,}5$; $T(0 \mid 0{,}5)$ $f''(-2) = -2 < 0 \rightarrow HP$; $f(-2) = 1{,}5$; $H_1(-2 \mid 1{,}5)$ $f''(2) = -2 < 0 \rightarrow HP$; $f(2) = 1{,}5$; $H_2(2 \mid 1{,}5)$	2 3 3
2c)	Höhenunterschied zwischen Bergen und Tälern: $(1{,}5 - 0{,}5) \cdot 0{,}5\text{ m} = 0{,}5\text{ m}$ Breite des Seitenteiles: $(2 + 2) \cdot 0{,}5\text{ m} = 2\text{ m}$ maximale Höhe des Seitenteiles: $\left(1{,}5 - \frac{3}{10}\right) \cdot 0{,}5\text{ m} = 0{,}6\text{ m}$	1 1 1
2d)	$h(x) = f(x) - g(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}$ $A_{ges} = \int_{-2}^{2} h(x)\,dx = \left[-\frac{1}{80}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5}x\right]_{-2}^{2} = \frac{8}{3}$ FE $\frac{8}{3} \cdot 0{,}25\text{ m}^2 \approx 0{,}67\text{ m}^2$; Der Flächeninhalt des Seitenteils beträgt etwa 0,67 m². $\frac{5 \cdot 3\text{ m}^2}{0{,}67\text{ m}^2} \approx 22{,}39$ Der 5 Liter-Kanister reicht für den Anstrich von 22 Seitenteilen.	1 3 1 1
	Summe	20

3. Aufgabe: Stochastik

An einem Oberstufenzentrum wurde die Dauer des Schulweges aller Schülerinnen und Schüler (SuS) der Schule mit Hilfe von fünf vorgegebenen Zeitspannen untersucht. Die Ergebnisse sind in nachfolgender Tabelle ersichtlich.

Dauer x (min)	Anzahl SuS
$0 \leq x < 20$	110
$20 \leq x < 30$	134
$30 \leq x < 40$	182
$40 \leq x < 60$	361
$60 \leq x < 90$	253

a) Geben Sie bezüglich der Schulwegdauer diejenige der fünf Zeitspannen an, in der sich der Median der ermittelten Daten befindet. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Björn benötigt für seinen Schulweg 35 Minuten. Bestimmen Sie, um wie viele Minuten seine Schulwegdauer vom arithmetischen Mittelwert aller SuS abweicht.

Berechnen Sie die Standardabweichung der Schulwegdauer aller SuS.

Für die 24 SuS einer FOS-Klasse wurde ermittelt, dass ein Viertel einen kurzen Schulweg von unter 20 min hat. Alle anderen SuS haben einen langen Schulweg.

c) Die Ergebnisse der Untersuchung sollen von drei ausgewählten SuS dieser FOS-Klasse vor der Schulleitung präsentiert werden. Ermitteln Sie hierzu die Anzahl an Auswahlmöglichkeiten an vortragenden Personen aus der Klasse.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine der drei zufällig ausgewählten vortragenden Personen einen kurzen Schulweg von weniger als 20 min hat. Erstellen Sie dazu ein geeignetes vollständiges Baumdiagramm.

e) Von allen SuS dieser FOS-Klasse mit langem Schulweg nutzen 12 die öffentlichen Verkehrsmittel (ÖPNV). Ein Drittel der gesamten Klasse nutzt keinen ÖPNV. Bestimmen Sie die Anzahl der SuS, die einen kurzen Schulweg haben und den ÖPNV nutzen.

Eine Person der Klasse wird nun zufällig ausgewählt. Prüfen Sie nachvollziehbar, ob zwischen den Ereignissen „Kurzer Schulweg“ und „ÖPNV-Nutzung“ eine stochastische Abhängigkeit besteht.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	2	5	2	6	5	20

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>3a)</td><td>

Der Median liegt in der Zeitspanne 40 min $\le x <$ 60 min. Die in der Tabelle angegebenen Zeitspannen sind aufsteigend sortiert. Da n = 1040 liegt der Median zwischen dem 520. und 521. Wert einer sortierten Urliste. Beide Werte befinden sich in der angegebenen Zeitspanne.

</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3b)</td><td>

arithmetisches Mittel unter Nutzung der Klassenmitten

$\bar{x} = \frac{1}{1040} \cdot (110 \cdot 10 + 134 \cdot 25 + 182 \cdot 35 + 361 \cdot 50 + 253 \cdot 75) \approx 46{,}00$

Björns Schulwegdauer von 35 min weicht um 11 min vom arithmetischen Mittel aller SuS ab.

$s = \sqrt{\frac{1}{1040} \cdot [110 \cdot (10-46)^2 + 134 \cdot (25-46)^2 + \ldots + 253 \cdot (75-46)^2]}$

$s \approx \sqrt{425{,}22} \approx 20{,}62$

Die Standardabweichung aller SuS beträgt 20,62 min.

(Alternativ: Bei Nutzung der n-1-Formel ergibt sich s ≈ 20,63 min.)

</td><td>3

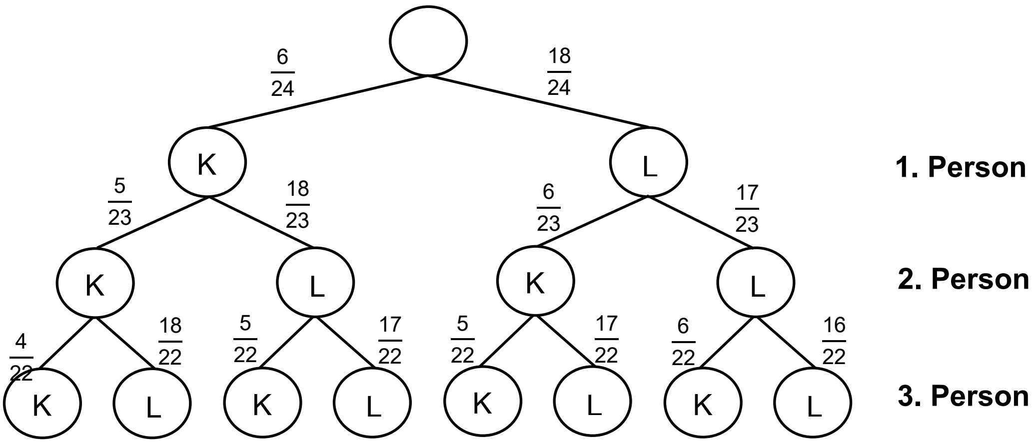
2</td></tr>
<tr><td>3c)</td><td>

$C_{24}^3 = \binom{24}{3} = 2024$

Es gibt 2024 Auswahlmöglichkeiten.

</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3d)</td><td>

K: Kurzer Schulweg (< 20 min), L: Langer Schulweg (≥ 20 min)



E: Mindestens eine der drei ausgewählten Personen hat einen kurzen Schulweg.

$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{18}{24} \cdot \frac{17}{23} \cdot \frac{16}{22} = 1 - \frac{102}{253} = \frac{151}{253} \approx 59{,}68\ \%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 59,68 % hat mindestens eine der drei vortragenden Personen einen kurzen Schulweg.

</td><td>4

2</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>3e)</td>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>ÖPNV</th><th>kein ÖPNV</th><th></th></tr>
<tr><td>kurzer Schulweg</td><td>4</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>langer Schulweg</td><td>12</td><td>6</td><td>18</td></tr>
<tr><td></td><td>16</td><td>8</td><td>24</td></tr>
</table>
Es gibt vier SuS mit kurzem Schulweg, die den ÖPNV nutzen.
(Hinweis: Das vollständige Ausfüllen der Vierfeldertafel ist nicht nötig.
Alternative Lösungsmöglichkeiten wie z. B. Baumdiagramme sind möglich.)
</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
Prüfung der stochastischen Unabhängigkeit anhand der relativen Häufigkeiten für die ÖPNV-Nutzung und den kurzen Schulweg:
$P(\text{ÖPNV} \cap \text{Kurzer Schulweg}) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
$P(\text{ÖPNV}) \cdot P(\text{Kurzer Schulweg}) = \frac{16}{24} \cdot \frac{6}{24} = \frac{1}{6}$
Die Ereignisse „Kurzer Schulweg“ und „ÖPNV-Nutzung“ sind stochastisch unabhängig.
</td>
<td>3</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Summe</td>
<td>20</td>
</tr>
</table>

Gutachten zur schriftlichen Fachhochschulreifeprüfung 2023/24 im Fach Mathematik

Name der Gutachter*in: ______________________ ☐ Erstgutachten ☐ Zweitgutachten

Name des Prüflings: ______________________ Klasse: __________

Schule: ____________________________________ Datum der Prüfung: 08.05.2024

Teil	Erwartete Leistung	BE Soll	BE Ist	Bemerkungen
1a)	Auswählen des Grades mit Begründung Skizzieren der Wendepunkte von G_g	2 1		
1b)	Begründen der Aussagen	4		
1c)	Angeben des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse Ermitteln der weiteren Achsenschnittpunkte	1 4		
1d)	Notieren der ersten drei Ableitungen von f Prüfen, ob P auf G_f liegt/ ob P ein Extrempunkt ist	3 2		
1e)	Berechnen der Wendestellen Nachweisen und Koordinatenangabe der 3 WP Zeigen, dass ein WP ein Sattelpunkt ist	3 3 1		
1f)	Angeben der Intervalle mit Linkskrümmung	2		
1g)	Erstellen der Wertetabelle in Einerschritten Skizzieren des Graphen von f im Intervall	1 3		
	Summe Aufgabe 1:	**30**		
2a)	Begründen der Symmetrie Skizzieren der Achsen in die Abbildung	1 2		
2b)	Notieren der ersten und zweiten Ableitung von f Ermitteln der Extremstellen von f Ermitteln der Art und der Koordinaten der EP	2 3 3		
2c)	Höhenunterschied zwischen Bergen und Tälern Breite des Seitenteils Maximale Höhe des Seitenteils	1 1 1		
2d)	Ermitteln der Differenzfunktion Berechnen des bestimmten Integrals Umrechnen in m^2 Bestimmen der Anzahl der Seitenteile	1 3 1 1		
	Summe Aufgabe 2:	**20**		
3a)	Angeben der Zeitspanne mit Begründung (Median)	2		
3b)	Berechnen der Abweichung des arithm. Mittels Berechnen der Standardabweichung aller SuS	3 2		
3c)	Ermitteln der Auswahlmöglichkeiten	2		
3d)	Erstellen eines vollständigen Baumdiagramms Berechnen der Wahrscheinlichkeit	4 2		
3e)	Bestimmen der Schüleranzahl Prüfen der stochastischen Abhängigkeit	2 3		
	Summe Aufgabe 3:	**20**		
	Gesamtpunktzahl:	**70**		

Bewertungsvorschlag:

____
Datum und Unterschrift der Gutachter*in