LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife im Schuljahr 2023/2024

Mathematik C

08. Mai 2024 – 09:00 Uhr

Unterlagen für die Lehrkraft

1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{23}{4}x + 7$; $x \in \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion heißt G_f.

a) Geben Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen an.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f an der Stelle $x_1 = 4$ eine Nullstelle besitzt und bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen.

c) Notieren Sie die Gleichungen der ersten drei Ableitungsfunktionen von f.
Berechnen Sie den Anstieg des Graphen von f in seinem Schnittpunkt mit der y-Achse.

d) Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art aller Extrempunkte von G_f und geben Sie das Monotonieverhalten an.

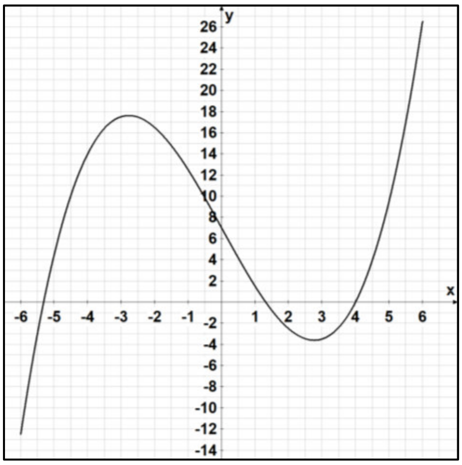
e) Weisen Sie nach, dass G_f einen Wendepunkt besitzt und bestimmen Sie rechnerisch dessen Koordinaten.

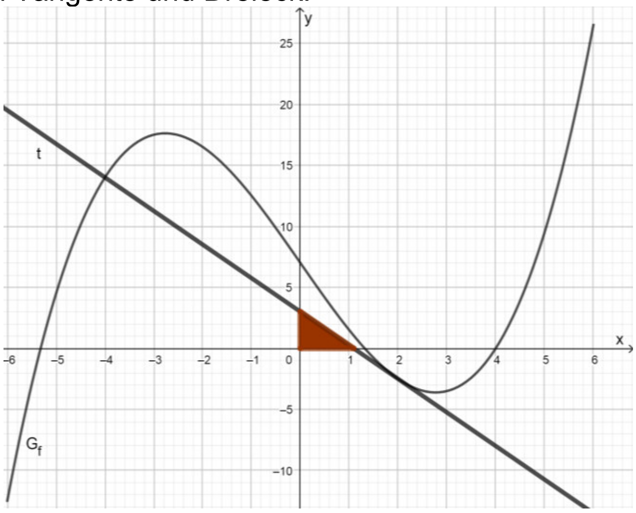
f) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-6 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Achten Sie auf eine geeignete Achseneinteilung.

g) Der Graph G_f besitzt an der Stelle $x_t = 2$ die Tangente t.
Ermitteln Sie für t die zugehörige Funktionsgleichung.

Die Tangente t bildet zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.
Skizzieren Sie sowohl die Tangente t als auch dieses Dreieck in Ihre Zeichnung von Aufgabe f) und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Dreiecks.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
Punkte	2	4	4	7	3	3	7	30

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1a)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$	2
1b)	$f(4) = 0$	1
	$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{23}{4}x + 7 = 0$ mit $x_1 = 4$ $\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{23}{4}x + 7\right):(x-4) = \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{7}{4}$ $\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}\left(x^2 + 4x - 7\right) = 0$ $x_2 \approx 1{,}32$ und $x_3 \approx -5{,}32$	3
1c)	$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{23}{4}$; $f''(x) = \frac{3}{2}x$; $f'''(x) = \frac{3}{2}$	3
	$f'(0) = -\frac{23}{4} = -5{,}75$	1
1d)	$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{23}{4} = 0$ $x^2 = \frac{23}{3}$; $x_{1,2} \approx \pm 2{,}77$	2
	$f''(2{,}77) \approx 4{,}16 > 0$; $f(2{,}77) \approx -3{,}61$; $T(2{,}77 \mid -3{,}61)$ $f''(-2{,}77) \approx -4{,}16 < 0$; $f(-2{,}77) \approx 17{,}61$; $H(-2{,}77 \mid 17{,}61)$	3
	$-\infty < x < -2{,}77$: G_f ist streng monoton steigend $-2{,}77 < x < 2{,}77$: G_f ist streng monoton fallend $2{,}77 < x < \infty$: G_f ist streng monoton steigend Hinweis: Bei Ersatz der Relationszeichen durch „≤“ kann auf den Zusatz „streng“ verzichtet werden.	2
1e)	$f''(x) = \frac{3}{2}x = 0$; $x = 0$ $f'''(0) = \frac{3}{2} \neq 0$; $f(0) = 7$; $W(0 \mid 7)$	3
1f)		3

1g)	$y = mx + n$ $y = f(2) = -2{,}5$ $m = f'(2) = -2{,}75$ $-2{,}5 = -2{,}75 \cdot 2 + n$ $t(x) = -2{,}75x + 3$	3
	Skizzierung von Tangente und Dreieck: 	2
	$t(x) = -2{,}75x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{12}{11} \approx 1{,}09$ $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{11} \cdot 3 = \frac{18}{11} \approx 1{,}64$ FE	2
	Summe	30

2. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung

Ein dem Football nachempfundener Spielball für Kinder ist ein rotationssymmetrisch geformter Ball mit spitzen Enden. Die Mantelfläche des Balls kann annähernd mit Hilfe des Graphen G_f einer quadratischen Funktion f mit

$f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + 5$; $x \in IR$

beschrieben werden (siehe Abbildung 1), wobei G_f **zwischen den Nullstellen um die x-Achse rotiert**.
Dabei entspricht eine Einheit im Koordinatensystem einem Zentimeter in der Wirklichkeit. Die Wanddicke des Balls wird vernachlässigt.

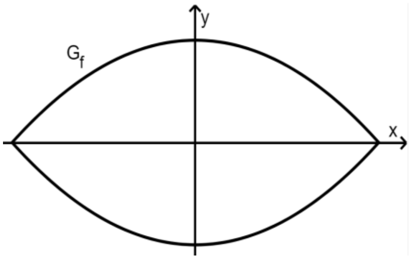


Abbildung 1

a) Zeigen Sie, dass der Ball eine Länge von 20 cm besitzt.

b) Bestimmen Sie rechnerisch den Flächeninhalt des in Abbildung 1 dargestellten Querschnittes des Balls in cm².

c) Berechnen Sie das Volumen des Balls in cm³.

Eine Flugbahn des Balls kann mit der Funktion g mit

$g(x) = -0{,}1x^2 + x + 1{,}2$; $x \in IR$

im ersten Quadranten annähernd modelliert werden (siehe Abbildung 2).

Die y-Achse stellt dabei die Flughöhe des Balls in Metern dar. Die x-Achse verläuft auf der Erdoberfläche und beschreibt die Entfernung des Balls von der Abwurfstelle in Metern.
Der Abwurf erfolgt an der Stelle x = 0.

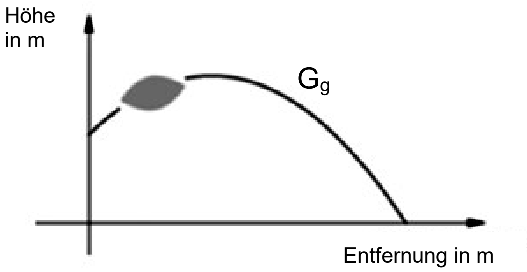


Abbildung 2 (nicht maßstäblich)

d) Geben Sie die Höhe des Balls beim Abwurf an.
Ermitteln Sie rechnerisch die maximale Flughöhe.

e) Berechnen Sie die Entfernung auf der Erdoberfläche von der Abwurfstelle bis zur Landestelle des Balls.

f) Ein zweiter Spieler soll den Ball in genau zwei Meter Höhe fangen.
Bestimmen Sie rechnerisch alle Möglichkeiten, in welcher Entfernung vom Abwurf er sich dazu platzieren könnte.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	3	3	4	4	3	3	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)	$f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + 5 = 0$ $\frac{1}{20}x^2 = 5$ $x_{1/2} = \pm 10$ Die Länge entspricht 20 cm.	3
2b)	$A = 2\cdot\int_{-10}^{10} f(x)dx = 2\cdot\left[-\frac{1}{60}x^3 + 5x\right]_{-10}^{10} = 2\cdot\left(\frac{100}{3} - \left(-\frac{100}{3}\right)\right) = \frac{400}{3}$ FE Die Querschnittsfläche des Balls beträgt rund 133,33 cm².	3
2c)	$V = \pi\cdot\int_{-10}^{10} (f(x))^2\,dx = \pi\cdot\int_{-10}^{10}\left(\frac{1}{400}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 25\right)dx$ $V = \pi\cdot\left[\frac{1}{2000}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + 25x\right]_{-10}^{10} = \pi\cdot\left(\left(\frac{400}{3}\right) - \left(-\frac{400}{3}\right)\right) \approx 837{,}76$ VE Das Volumen des Balls beträgt rund 837,76 cm³.	4
2d)	Die Abwurfhöhe beträgt 1,20 m.	1
	$g'(x) = -0{,}2x + 1 = 0$ $x = 5$ $g(5) = 3{,}7$ LE Hinweis: Wegen der Wurfparabel, ist ein Nachweis des Hochpunktes nicht nötig. Alternativ könnte auch die Scheitelpunktsformel benutzt werden. Die maximale Flughöhe beträgt 3,70 m.	3
2e)	$g(x) = -0{,}1x^2 + x + 1{,}2 = 0$ $x^2 - 10x - 12 = 0$ $x_1 \approx 11{,}08$ und $x_2 \approx -1{,}08$ entfällt, da außerhalb des I. Quadranten Die Entfernung der Landestelle vom Abwurf beträgt ca. 11,08 m.	3
2f)	$-0{,}1x^2 + x + 1{,}2 = 2$ $-0{,}1x^2 + x - 0{,}8 = 0$ $x^2 - 10x + 8 = 0$ $x_1 \approx 9{,}12$ und $x_2 \approx 0{,}88$ Der Fänger könnte sich in einer Entfernung von rund 0,88 m oder 9,12 m vom Werfer platzieren.	3
	Summe	20

3. Aufgabe: Stochastik

Ein Radverleih im Havelland bietet Fahrräder in drei Rahmengrößen S, M und L an, die nach der Körpergröße zugewiesen werden.

a) Am vergangenen Montag wurden nur acht Fahrräder verliehen. Die Fahrradcomputer zeigten folgende Tagesstrecken in Kilometern an: 29, 19, 34, 29, 29, 12, 25, 23.

Geben Sie den Median der Tagesstrecken an und berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der Tageskilometer.

b) Die Fahrräder vom Montag wurden in folgenden Größen ausgeliehen: 2 x S, 5 x M,1 x L.

Geben Sie die relative Häufigkeit der am Montag verliehenen Fahrräder pro Größe an.

Bestimmen Sie **ausgehend von diesen relativen Häufigkeiten** die Anzahl der Fahrräder je Größe, die der Radverleih für eine angemeldete Gruppe von 30 Personen mindestens bräuchte.

Der Radverleih kennt die 30er-Gruppe nicht. Geben Sie an, wie viele Fahrräder insgesamt vorrätig sein müssten, wenn der Radverleih absolut sicher gehen möchte, dass jede Person der 30er-Gruppe ein Fahrrad in der passenden Größe bekommt.

c) In der letzten Woche musste an drei verschiedenen Tagen jeweils ein Fahrrad repariert werden. Aus Erfahrung kann angenommen werden, dass ein kaputtes Fahrrad mit einer Wahrscheinlichkeit von 25 % der Größe S angehört und mit 35 % zur Größe M.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

E_1: Von jeder der drei Größen war genau ein Fahrrad defekt.
E_2: Kein Fahrrad der Größe S war defekt.

Formulieren Sie das Gegenereignis zu E_2 und geben Sie dessen Wahrscheinlichkeit an.

d) Zu Saisonbeginn wurden 80 neue Fahrräder geliefert. Davon waren sechs beschädigt. Aus der Lieferung wurden nacheinander drei verschiedene Testräder überprüft.

Verdeutlichen Sie die Überprüfung der Testräder in einem vollständig beschrifteten dreistufigen Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

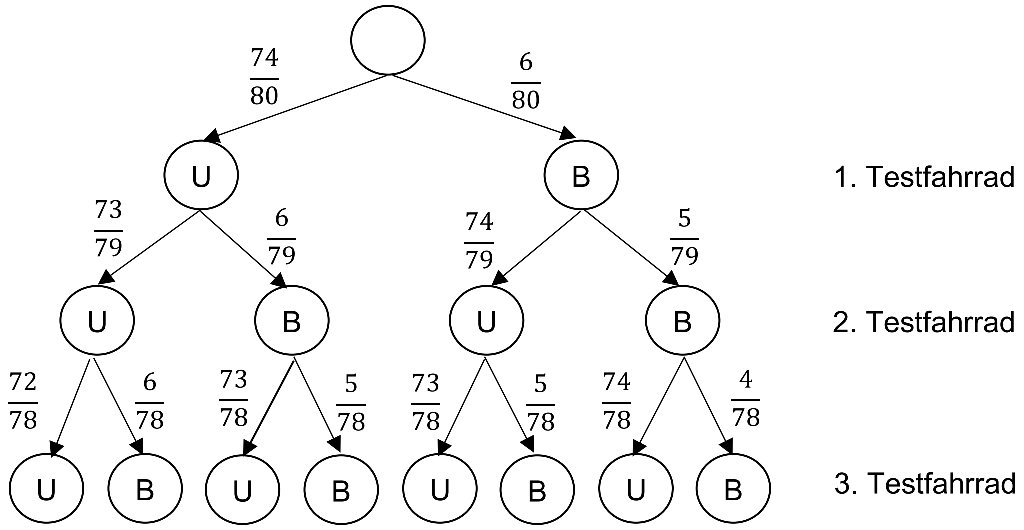
E_3: Keins der Testräder war beschädigt.
E_4: Genau zwei der drei Testräder waren beschädigt.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	4	3	7	6	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
3a)	Der Median liegt zwischen dem 4. und 5. Wert der geordneten Stichprobe 12, 19, 23, 25, 29, 29, 29, 34 z = 27 Arithmetischer Mittelwert: $\bar{x} = \frac{200}{8} = 25$ $s^2 = \frac{(12-25)^2 + \ldots + (34-25)^2}{8} = \frac{338}{8} \approx 42{,}25$ Standardabweichung: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{338}{8}} \approx 6{,}5$ (Alternativ bei Nutzung der $\frac{1}{n-1}$ -Formel: s = 6,95)	 1 1 2
3b)	Rahmengröße: S / M / L abs. H.: 2 / 5 / 1 rel. H.: **$\frac{2}{8}$ = 25 %** / **$\frac{5}{8}$ = 62,5 %** / **$\frac{1}{8}$ = 12,5 %** Hochrechnung auf 30 Fahrräder: 7,5 / 18,75 / 3,75 Für die Gruppe wären auf Grund der relativen Häufigkeiten mindestens 8 Fahrräder in S, 19 in M und 4 in L vorrätig zu halten. Für absolute Sicherheit wären pro Größe 30 Fahrräder nötig, also insgesamt 90.	 1 1 1
3c)	P(L) = 100 % – (25 % + 35 %) = 40 % Von jeder Größe war genau ein Fahrrad defekt: $P(E_1)$ = P(SML) + P(SLM) + P(MSL) + P(MLS) + P(LSM) + P(LMS) = 6·0,25·0,35·0,4 = 21 % Kein Fahrrad der Größe S war defekt: $P(E_2)$ = P(MMM) + 3·P(MML) + 3·P(MLL) + P(LLL) $= 0{,}35^3 + 3\cdot 0{,}35^2\cdot 0{,}4 + 3\cdot 0{,}35\cdot 0{,}4^2 + 0{,}4^3 \approx 42{,}19$ % Gegenereignis zu E_2: Mindestens ein Fahrrad der Größe S war defekt: $P(\overline{E_2})$ = 100 % – $P(E_2)$ = 100 % – 42,19 % = 57,81 %	1 2 2 2

Table in 3b):

Rahmengröße	S	M	L
abs. H.	2	5	1
rel. H.	**$\frac{2}{8}$ = 25 %**	**$\frac{5}{8}$ = 62,5 %**	**$\frac{1}{8}$ = 12,5 %**
Hochrechnung auf 30 Fahrräder	7,5	18,75	3,75

<table>
<tr><td>3d)</td><td>B: beschädigt, U: unbeschädigt

</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>$P(E_3) = \frac{74}{80} \cdot \frac{73}{79} \cdot \frac{72}{78} = \frac{8103}{10270} \approx 78{,}9\ \%$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>$P(E_4) = \frac{74}{80} \cdot \frac{6}{79} \cdot \frac{5}{78} + \frac{6}{80} \cdot \frac{74}{79} \cdot \frac{5}{78} + \frac{6}{80} \cdot \frac{5}{79} \cdot \frac{74}{78} = \frac{111}{8216} \approx 1{,}35\ \%$</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Mit einer Wahrscheinlichkeit von 78,9 % ist keines der drei Testfahrräder beschädigt, mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,35 % sind genau zwei davon beschädigt.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>20</td></tr>
</table>

Gutachten zur schriftlichen Fachhochschulreifeprüfung 2023/24 im Fach Mathematik

Name der Gutachter*in: ______________________ ☐ Erstgutachten ☐ Zweitgutachten

Name des Prüflings: ______________________ Klasse: __________

Schule: ________________________________ Datum der Prüfung: 08.05.2024

Teil	Erwartete Leistung	BE Soll	BE Ist	Bemerkungen
1a)	Angeben des Verhaltens im Unendlichen	2		
1b)	Nachweis der gegebenen Nullstelle von f Berechnen der weiteren Nullstellen von f	1 3		
1c)	Notieren der ersten bis dritten Ableitung Berechnen des Anstiegs im y-Achsen-Schnittpunkt	3 1		
1d)	Berechnen der Extremstellen Ermitteln der Art und der Koordinaten der EP Angeben des Monotonieverhaltens	2 3 2		
1e)	Bestimmen der Wendepunktkoordinaten	3		
1f)	Zeichnen des Graphen im Intervall	3		
1g)	Ermitteln der Tangentengleichung Skizzieren von Tangente und Dreieck Berechnen des Flächeninhaltes des Dreiecks	3 2 2		
	Summe Aufgabe 1:	**30**		
2a)	Nachweis der Balllänge	3		
2b)	Ermitteln des Flächeninhalts (Querschnitt) vom Ball	3		
2c)	Berechnen des Volumens des Balls	4		
2d)	Angeben der Höhe beim Ballabwurf Ermitteln der maximalen Flughöhe	1 3		
2e)	Berechnung der Entfernung der Landestelle	3		
2f)	Bestimmen der Möglichkeiten beim Fangen	3		
	Summe Aufgabe 2:	**20**		
3a)	Angeben des Medians Berechnen des arithmetischen Mittels Berechnen der Standardabweichung	1 1 2		
3b)	Angeben der relativen Häufigkeiten Bestimmen absoluter Häufigkeiten Angeben einer Fahrradmenge	1 1 1		
3c)	Ermitteln der Wahrscheinlichkeit für Größe L Bestimmen der Wahrscheinlichkeit von E_1 Bestimmen der Wahrscheinlichkeit von E_2 Formulieren des Gegenereignisses von E_2 und Angeben seiner Wahrscheinlichkeit	1 2 2 2		
3d)	Zeichnen und Beschriften des Baumdiagramms Berechnen der Wahrscheinlichkeit von E_3 Berechnen der Wahrscheinlichkeit von E_4	3 1 2		
	Summe Aufgabe 3:	**20**		
	Gesamtpunktzahl:	**70**		

Bewertungsvorschlag:

____
Datum und Unterschrift der Gutachter*in