Zentrale Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife im Schuljahr 2024/2025

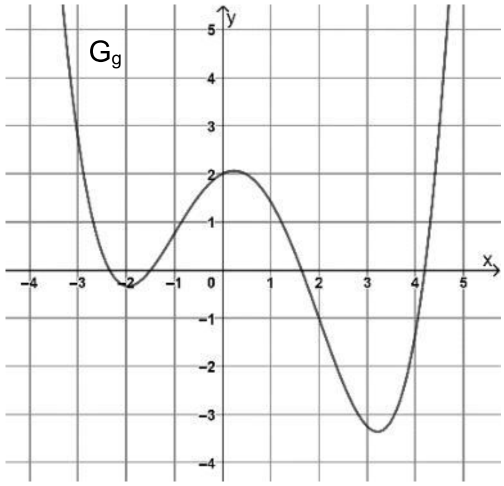
Mathematik A

28. Mai 2025 – 09:00 Uhr

Unterlagen für die Lehrkraft

1. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung

Die Abbildung rechts zeigt den Graphen G_g einer ganzrationalen Funktion g vierten Grades.
G_g besitzt Wendestellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$.



a) Skizzieren Sie in die Abbildung …
   (I) … die Tangente an G_g an der Stelle x = 3.
   (II) … die Fläche, die G_g im I. Quadranten mit beiden Koordinatenachsen einschließt.

b) Nennen Sie mit Hilfe der Abbildung den Funktionswert von g an der Stelle x = 2 und begründen Sie, ob die erste Ableitung von g an dieser Stelle positiv, negativ oder Null ist.

c) Geben Sie das Krümmungsverhalten von G_g mit Hilfe geeigneter Intervalle an.

   Markieren Sie in der Abbildung diejenigen Bereiche des Graphen, an denen eine Linkskrümmung vorliegt.

Gegeben ist nun eine andere ganzrationale Funktion f mit

$$f(x) = -3x^3 + 5x^2 + 8x + 12 \; ; \; x \in \mathbb{R}.$$

Der Graph dieser Funktion heißt G_f.

d) Prüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt P(–2 | 50) auf G_f liegt.

   Weisen Sie nach, dass x = 3 eine Nullstelle von f ist.
   Zeigen Sie rechnerisch, dass es keine weitere Nullstelle der Funktion gibt.

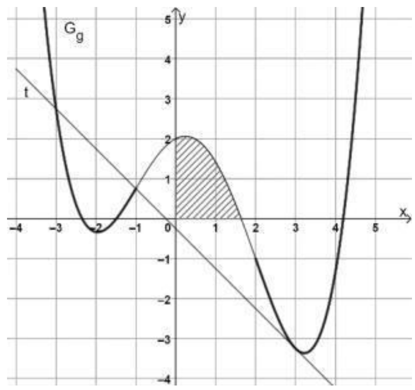
e) Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten aller Extrempunkte von G_f.

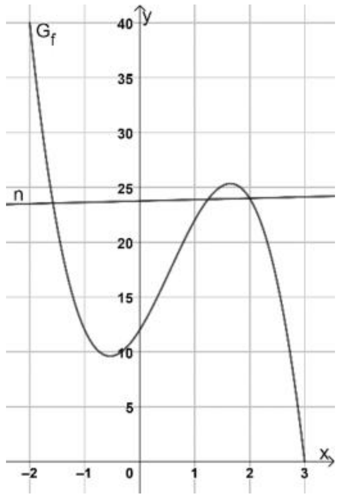
f) Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Fläche zwischen G_f und der x-Achse im Intervall $1 \leq x \leq 3$.

g) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-2 \leq x \leq 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
   Achten Sie auf eine geeignete Achseneinteilung.

h) Ermitteln Sie die Gleichung der Normale n an G_f an der Stelle x = 2.
   Zeichnen Sie die Normale n in das Koordinatensystem von Aufgabe g) mit ein.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	Summe
Punkte	2	2	3	5	7	3	3	5	30

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1a)	 Hinweis: Die Markierung der linksgekrümmten Bereiche ist Teil der Aufgabe c).	2
1b)	$g(2) = -1$ Der Wert von $g'(2)$ ist negativ, da der Graph bei $x = 2$ fallend ist.	2
1c)	$-\infty < x < -1$: G_g ist linksgekrümmt. $-1 < x < 2$: G_g ist rechtsgekrümmt. $2 < x < \infty$: G_g ist linksgekrümmt. Markierung der linksgekrümmten Bereiche am Graphen (siehe Abbildung oben)	2 1
1d)	$f(-2) = 40 \neq 50$ P liegt nicht auf G_f. $f(3) = 0$ $f(x) = -3x^3 + 5x^2 + 8x + 12 = 0$ mit $x = 3$ $(-3x^3 + 5x^2 + 8x + 12) : (x - 3) = -3x^2 - 4x - 4$ $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = 0$ $x = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}}$ Da die Diskriminante negativ ist, gibt es keine weiteren Nullstellen.	1 1 3
1e)	$f'(x) = -9x^2 + 10x + 8 = 0$ $x^2 - \frac{10}{9}x - \frac{8}{9} = 0$ $x_1 \approx 1{,}65$ und $x_2 \approx -0{,}54$ $f''(x) = -18x + 10$ $f''(1{,}65) = -19{,}7 < 0$; $f(1{,}65) \approx 25{,}34$; $H(1{,}65 \mid 25{,}34)$ $f''(-0{,}54) = 19{,}72 > 0$; $f(-0{,}54) \approx 9{,}61$; $T(-0{,}54 \mid 9{,}61)$	1 2 1 3

1f)	$A = \int_1^3 f(x)\,dx = \left[-\frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 + 12x\right]_1^3 = \frac{225}{4} - \frac{203}{12} = \frac{118}{3} \approx 39{,}33$ FE	3
1g)	 Hinweis: Die Normale n ist Bestandteil der Aufgabe h).	3
1h)	Gleichung der Normalen n: $y = m_n \cdot x + n$ $f(2) = 24$ $f'(2) = -8; \quad m_n = \frac{1}{8}$ $24 = \frac{1}{8} \cdot 2 + n$ $n(x) = \frac{1}{8}x + 23{,}75$ Einzeichnen in das Koordinatensystem von Aufgabe g) (siehe oben)	4 1
	Summe	30

2. Aufgabe: Differentialrechnung

Beim Training einer Basketballmannschaft wird ein erfolgreicher Korbwurf eines Spielers mit Hilfe einer Videoanalyse aufgezeichnet und in einem Koordinatensystem dargestellt.
Zur Vereinfachung wird die Flugbahn des Balles auf den Verlauf seines Schwerpunkts reduziert (siehe Abbildung 1).

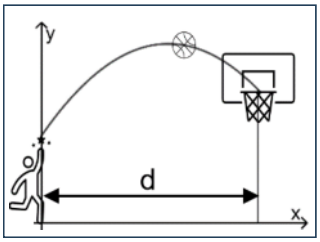


Abbildung 1

Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit. Der Hallenboden befindet sich auf Höhe der x-Achse.

Die Flugbahn des Balls wird mit Hilfe einer quadratischen Funktion f beschrieben.
Ihr Graph heißt G_f.

a) Der Ball wird im Punkt A(0 | 2) abgeworfen. In B(3 | 3,8) besitzt die Flugbahn ihren Hochpunkt. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung der Funktion f, deren Graph diese Eigenschaften erfüllt.
(zur Kontrolle: $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x + 2$)

b) Ein Gegenspieler steht zwei Meter entfernt vom Werfer in Richtung Korb.
Ermitteln Sie, auf welcher Höhe der Gegenspieler den Ball abfangen kann, wenn er senkrecht nach oben springt.

c) Der Ball landet im Korb, wenn er im Sinkflug eine Höhe von drei Metern erreicht.
Berechnen Sie die horizontale Entfernung d des Werfers vom Korb (siehe Abbildung 1).

Der Basketballverein möchte im Außenbereich eine rechteckige Trainingsfläche errichten. Eine Seite liegt direkt an einer Außenwand der Sporthalle (siehe Abbildung 2).
Für die Begrenzung der übrigen drei Seiten steht Baumaterial von insgesamt 46 m Länge zur Verfügung, das vollständig verwendet werden soll. Die Dicke des Materials ist im Rahmen dieser Aufgabe zu vernachlässigen.

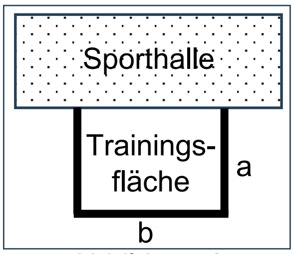


Abbildung 2

d) Berechnen Sie unter den gegebenen Bedingungen jeweils den Flächeninhalt der Trainingsfläche, wenn …
(I) … die Seitenlänge a = 8 m beträgt.
(II) … die Seitenlänge a = 14 m beträgt.

e) Durch Veränderung von a kann der Flächeninhalt der Trainingsfläche vergrößert oder verkleinert werden. Ermitteln Sie die Gleichung einer Funktion, die den Flächeninhalt der Trainingsfläche in Abhängigkeit von der Seitenlänge a beschreibt.
(zur Kontrolle: $A(a) = -2a^2 + 46a$)

f) Bestimmen Sie rechnerisch den maximal möglichen Wert des Flächeninhalts A der Trainingsfläche und die zugehörigen Seitenlängen a und b.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	6	1	3	3	3	4	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)	$f(x) = ax^2 + bx + c$ A(0 | 2): $c = 2$ B(3 | 3,8): $9a + 3b + c = 3{,}8$ $f'(x) = 2ax + b$ $f'(3) = 0$: $6a + b = 0$ Lösung des LGS: $a = -\frac{1}{5}$ und $b = \frac{6}{5}$ $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x + 2$ Hinweis: Alternative Lösungswege (z. B. Nutzung der Scheitelpunktform) sind möglich.	1 3 2
2b)	$f(2) = 3{,}6$ Der Gegenspieler kann den Ball auf einer Höhe von 3,60 m abfangen.	1
2c)	$f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x + 2 = 3$ $x^2 - 6x + 5 = 0$ $x_1 = 5$ (und $x_2 = 1$ entfällt, da der Ball dort noch im Steigflug ist) Der Werfer steht 5 m vom Korb entfernt.	3
2d)	(I) $b = 46 - 2 \cdot a = 46 - 2 \cdot 8 = 30$ $A = a \cdot b = 8 \cdot 30 = 240$ Der Flächeninhalt beträgt 240 m². (II) $b = 18$; $A = 252$ Der Flächeninhalt beträgt 252 m².	3
2e)	HB: $A(a, b) = a \cdot b$ NB: $b + 2a = 46 \rightarrow b = 46 - 2a$ ZF: $A(a) = a \cdot (46 - 2a) = -2a^2 + 46a$	3
2f)	$A'(a) = -4a + 46 = 0$ $a = 11{,}5$ $b = 46 - 2 \cdot 11{,}5 = 23$ $A_{max} = 11{,}5 \cdot 23 = 264{,}5$ Mit den Seitenlängen a = 11,5 m und b = 23 m wird die maximale Trainingsfläche von 264,5 m² erreicht.	4
	Summe	20

3. Aufgabe: Stochastik

Ein Jahr nach der Teillegalisierung von Cannabis führte die Lokalredaktion einer Zeitung eine Befragung von insgesamt 50 Personen in einer Fußgängerzone durch.

a) Von allen 50 Personen wurden acht zufällig ausgewählt, um sie ganz konkret nach der Konsumhäufigkeit im letzten Jahr zu befragen.
Ermitteln Sie hierzu die Anzahl an Auswahlmöglichkeiten.

b) Diese acht Befragten nannten folgende Konsumhäufigkeiten: 2, 0, 10, 1, 0, 40, 0, 9.
Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung bezüglich der Häufigkeit des Cannabiskonsums dieser Personen.

Es gaben 30 der insgesamt 50 befragten volljährigen Personen an, noch nie Cannabis konsumiert zu haben.

c) Für die ersten drei der 50 Befragten werden folgende Ereignisse betrachtet:

A: Alle drei Personen haben Cannabis konsumiert.

B: Mindestens eine der drei Personen hat Cannabis konsumiert.

Erstellen Sie hierzu ein vollständiges Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten von A und B in Prozent.

Formulieren Sie das Gegenereignis zu B.

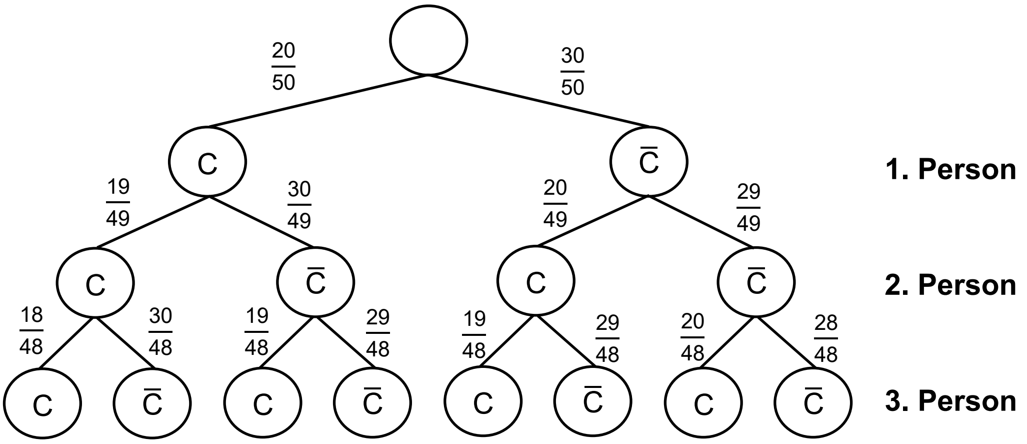
d) Die 50 Befragten werden entsprechend der Altersstruktur in die beiden Gruppen „Jung“ (unter 28 Jahre) und „Alt“ (ab 28 Jahre) unterteilt. Es ist bekannt, dass aus der 38-köpfigen Gruppe „Jung“ insgesamt 16 Cannabiskonsumenten stammen.

Zeigen Sie, dass die Ereignisse Alter und Cannabiskonsum stochastisch abhängig sind.

e) Die Deutsche Beobachtungsstelle für Drogen und Drogensucht (DBDD) hat in einer Untersuchung im Jahr 2021 festgestellt, dass 34,7 % der 18- bis 64-jährigen Erwachsenen in Deutschland schon irgendwann einmal in ihrem Leben Cannabis probiert haben.

Ermitteln Sie unter dieser Voraussetzung die prozentuale Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten drei fremden Personen (der Altersgruppe 18 bis 64 Jahre), die Ihnen auf dem Schulweg begegnen, alle schon einmal Cannabis probiert haben.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	2	3	8	5	2	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
3a)	$C_{50}^{8} = \binom{50}{8} = 536.878.650$ Es gibt 536.878.650 Auswahlmöglichkeiten.	2
3b)	$\bar{x} = \frac{1}{8} \cdot (2 + 0 + \ldots + 9) = 7{,}75$ $s = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot [(2-7{,}75)^2 + (0-7{,}75)^2 + \ldots + (9-7{,}75)^2]} = \sqrt{\frac{2611}{16}} \approx 12{,}77$ Die ersten acht Befragten haben durchschnittlich 7,75-mal Cannabis konsumiert, bei einer Standardabweichung von etwa 12,77. (Alternativ bei Nutzung der n-1-Formel: $s \approx 13{,}66$)	3
3c)	C – Cannabis konsumierende Person 	4
	$P(A) = \frac{20}{50} \cdot \frac{19}{49} \cdot \frac{18}{48} = \frac{57}{980} \approx 5{,}82\ \%$	1
	$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{30}{50} \cdot \frac{29}{49} \cdot \frac{28}{48} = 1 - \frac{29}{140} = \frac{111}{140} \approx 79{,}29\ \%$	2
	$\bar{B}$: Keine ausgewählte Person hat Cannabis konsumiert.	1
3d)	$P(C) = \frac{20}{50}$, $P(\text{Jung}) = \frac{38}{50}$, $P(C \cap \text{Jung}) = \frac{16}{50} = 0{,}32$	3
	$P(C) \cdot P(\text{Jung}) = \frac{20}{50} \cdot \frac{38}{50} = \frac{38}{125} = 0{,}304 \neq P(C \cap \text{Jung})$ Somit sind die Ereignisse Cannabiskonsum und Alter stochastisch abhängig.	2
3e)	$P = 0{,}347^3 \approx 4{,}18\ \%$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,18 % haben - unter der beschriebenen Voraussetzung - die ersten drei Fremden schon einmal Cannabis probiert.	2
	Summe	20

Gutachten zur schriftlichen Fachhochschulreifeprüfung 2024/25 im Fach Mathematik

Gutachterin/Gutachter: ______________________ ☐ Erstgutachten ☐ Zweitgutachten

Prüfling: ______________________ Klasse: __________

Schule: ______________________ Datum der Prüfung: 28.05.2025

Teil	Erwartete Leistung	BE Soll	BE Ist	Bemerkungen
1a)	Skizzieren der Tangente Skizzieren der Fläche	1 1		
1b)	Nennen des Funktionswerts an der Stelle x = 2 Begründen des Anstiegs	1 1		
1c)	Angeben des Krümmungsverhaltens Markieren der linksgekrümmten Bereiche	2 1		
1d)	Prüfen, ob P auf G_f liegt Nachweisen der Nullstelle bei x = 3 Nachweisen fehlender weiterer Nullstellen	1 1 3		
1e)	1. Ableitung und Berechnen der Extremstellen 2. Abl. und Ermitteln der Koord. und Art der EP	3 4		
1f)	Berechnen der Maßzahl des Flächeninhalts	3		
1g)	Zeichnen des Graphen von f	3		
1h)	Bestimmen der Normalengleichung bei x = 2 Einzeichnen der Normale in das KS	4 1		
	Summe Aufgabe 1:	**30**		
2a)	Angeben der allgem. Form einer quadrat. Funktion Aufstellen eines LGS Lösen des LGS, Angeben der Funktionsgleichung	1 3 2		
2b)	Ermitteln der Höhe	1		
2c)	Berechnen der horizontalen Entfernung vom Korb	3		
2d)	Berechnen von zwei Flächeninhalten	3		
2e)	Ermitteln der Zielfunktion aus HB und NB	3		
2f)	Bestimmen von A_{max} und zugehörigen a und b	4		
	Summe Aufgabe 2:	**20**		
3a)	Ermitteln der Anzahl an Auswahlmöglichkeiten	2		
3b)	Berechnen von arithm. Mittel und Standardabw.	3		
3c)	Erstellen eines vollständigen Baumdiagramms und Angeben der Wahrscheinlichkeiten Berechnen der Wahrscheinlichkeit von A Berechnen der Wahrscheinlichkeit von B Formulieren des Gegenereignisses von B	4 1 2 1		
3d)	Ermitteln der 3 relevanten Wahrscheinlichkeiten Nachweisen der stoch. Abhängigkeit zweier Ereign.	3 2		
3e)	Berechnen der prozentualen Wahrscheinlichkeit	2		
	Summe Aufgabe 3:	**20**		
	Gesamtpunktzahl:	**70**		

Bewertungsvorschlag:

____

Datum und Unterschrift der Gutachterin/des Gutachters