LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife im Schuljahr 2024/2025

Mathematik C

28. Mai 2025 – 09:00 Uhr

Unterlagen für die Lehrkraft

1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^5 + 2x^3$; $x \in \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion heißt G_f.

a) Entscheiden und begründen Sie, ob G_f achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft.
Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte im Unendlichen an.

b) Weisen Sie nach, dass $x = \sqrt{8}$ eine Nullstelle von f ist.
Ermitteln Sie die beiden weiteren Nullstellen von f.

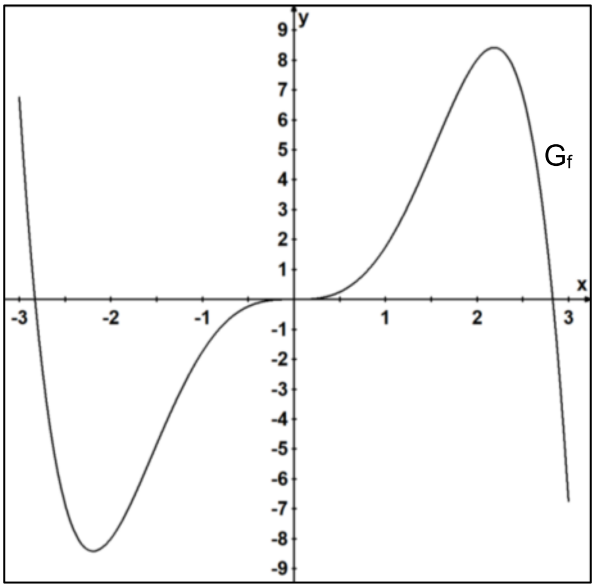
c) Geben Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion f an.

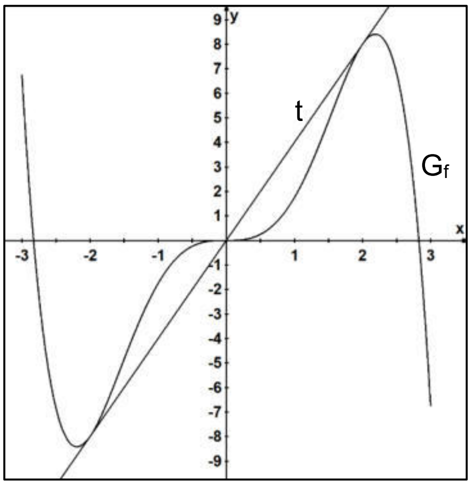
d) Ermitteln Sie rechnerisch die vollständigen Koordinaten und die Art der beiden Extrempunkte von G_f.
Weisen Sie nach, dass G_f einen Sattelpunkt besitzt und geben Sie dessen Koordinaten an.
Geben Sie das Monotonieverhalten von G_f an.

e) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-3 \le x \le 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Achten Sie dabei auf eine geeignete Achseneinteilung.

f) Ermitteln Sie den Anstieg von f an der Stelle $x = 2$ und bestimmen Sie die Gleichung für die Tangente t an G_f an dieser Stelle.
G_f und die Tangente t schneiden sich an zwei weiteren Stellen. Geben Sie die Koordinaten der beiden zugehörigen Schnittpunkte an.
Zeichnen Sie die Tangente t mit in das Koordinatensystem aus Aufgabe e) ein.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	4	3	3	11	3	6	30

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1a)	Es liegt Punktsymmetrie zum Ursprung vor. Begründung über $f(-x) = -f(x)$ oder ungerade Exponenten und Absolutglied gleich 0.	2
	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	2
1b)	$x_1 = \sqrt{8}$ ist eine Nullstelle, da $f(\sqrt{8}) = -\frac{1}{4}\sqrt{8}^5 + 2\sqrt{8}^3 = 0$	1
	$x_2 = -\sqrt{8}$ ist zweite Nullstelle wegen der Punktsymmetrie	1
	$x_3 = 0$ ist dritte Nullstelle wegen der Punktsymmetrie	1
	Hinweis: Die Nullstellen können alternativ durch Ausklammern und Wurzelziehen berechnet werden.	
1c)	$f'(x) = -\frac{5}{4}x^4 + 6x^2$; $f''(x) = -5x^3 + 12x$; $f'''(x) = -15x^2 + 12$	3
1d)	$f'(x) = -\frac{5}{4}x^4 + 6x^2 = 0 = x^2\left(-\frac{5}{4}x^2 + 6\right)$; $x_1 = 0$ $0 = -\frac{5}{4}x^2 + 6$; $x_{2/3} \approx \pm 2{,}19$	3
	$f''(-2{,}19) \approx 26{,}24 > 0$; $f(-2{,}19) \approx -8{,}41$; $T(-2{,}19 \mid -8{,}41)$ Tiefpunkt $f''(2{,}19) \approx -26{,}24 < 0$; $f(2{,}19) \approx 8{,}41$; $H(2{,}19 \mid 8{,}41)$ Hochpunkt	3
	$f''(0) = 0$; $f'''(0) = 12 \neq 0$; $f(0) = 0$; $S(0 \mid 0)$ Sattelpunkt	3
	$-\infty < x < -2{,}19$: G_f ist monoton fallend $-2{,}19 < x < 2{,}19$: G_f ist monoton steigend $2{,}19 < x < \infty$: G_f ist monoton fallend	2
1e)		3

1f)	Anstieg an der Stelle x = 2: $f'(2) = -\frac{5}{4} \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2 = 4$	1
	Tangentengleichung: y = mx + n mit m = 4 und y = f(2) = 8 8 = 4·2 + n ; n = 0 t(x) = 4x	2
	Weitere Schnittpunkte von G_f und t: $S_1(0 \mid 0)$ und $S_2(-2 \mid -8)$	2
	Ergänzen der Tangente 	1
	Summe	30

2. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung

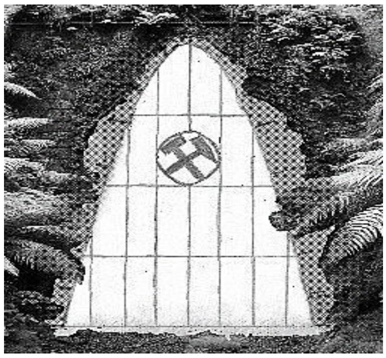


Abbildung 1

Beim Ausbau eines Besucherbergwerks wird ein Belüftungstunnel entdeckt. Sein Querschnitt bleibt über die gesamte Länge gleich und ist am Boden 1 m breit und in der Mitte 1,20 m hoch (Abbildung 1).

Der Tunnelquerschnitt wird mit Hilfe der Funktion f mit $f(x) = 4{,}8x^4 - 6x^2 + 1{,}2$; $x \in \mathbb{R}$ simuliert.

Die Achsen des Koordinatensystems liegen wie in Abbildung 2 auf dem Boden und senkrecht in der Mitte des Tunnels. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a) Weisen Sie nach, dass durch den entsprechenden Teil des Graphen der Funktion f die gemessene Breite und Höhe des Tunnels genau wiedergegeben wird.

b) Das Gitter im Tunneleingang besteht aus 7 **senkrechten** Eisenstangen im Abstand von je 12,5 cm, deren Dicke vernachlässigt werden kann. Bestimmen Sie die Länge der vorletzten Eisenstange auf der rechten Seite.

Die **waagerechte** Eisenstange des Gitters unter dem Bergbausymbol befindet sich in einer Höhe von 60 cm. Berechnen Sie ihre Länge.

c) Zeigen Sie, dass sich mit der Funktion f ein Tunnelquerschnitt von 0,76 m² ergibt. Bestimmen Sie das Volumen des gesamten Tunnels bei einer Länge von 150 m und die Masse des damals beim Bau des Tunnels abtransportierten Gesteins, wenn ein Kubikmeter 2,8 Tonnen wiegt.

Für die weitere Nutzung wird ein zusätzlicher neuer Belüftungstunnel benötigt. Er soll den Querschnitt einer achsensymmetrischen **quadratischen** Funktion g bekommen und dieselbe Höhe und Breite wie der historische Tunnel erhalten (Abbildung 2).

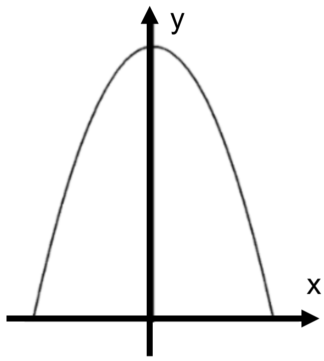
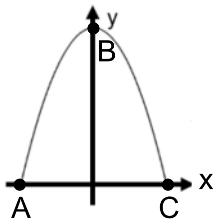


Abbildung 2

d) Markieren Sie in der Abbildung 2 drei markante Punkte des neuen Tunnelquerschnitts und notieren Sie deren Koordinaten. Bestimmen Sie die Gleichung einer passenden Funktion g, auf deren Graph alle drei Punkte liegen. (zur Kontrolle: $g(x) = -4{,}8x^2 + 1{,}2$)

e) Der neue Tunnel hat eine Querschnittsfläche von 0,8 m² und soll genau das gleiche Volumen wie der in Aufgabe c) beschriebene alte Tunnel haben.
Ermitteln Sie die geplante Länge des neuen Tunnels.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	3	6	5	4	2	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)	Tunnelbreite: $f(-0,5) = f(0,5) = 0$ Der Nullstellenabstand entspricht 1 m. Tunnelhöhe in der Mitte: $f(0) = 1,2$ entspricht 1,2 m	2 1
2b)	Position der 6. Stange bei $x = 0,25$; $f(0,25) = \frac{27}{32} \approx 0,84$ Die vorletzte Eisenstange ist 0,84 m lang. $f(x) = 0,6 = 4,8x^4 - 6x^2 + 1,2$ $0 = 4,8z^2 - 6z + 0,6$ Substitution $z_1 \approx 0,11$; $x_{1/2} \approx \pm 0,33$ $z_2 \approx 1,14$; $x_{3/4} \approx \pm 1,07$ (entfällt, da außerhalb des Intervalls) Die waagerechte Eisenstange ist 0,66 m lang.	2 4
2c)	$A = \int_{-0,5}^{0,5} f(x)dx = \left[\frac{24}{25}x^5 - 2x^3 + 1,2x\right]_{-0,5}^{0,5} = \frac{19}{50} - \left(-\frac{19}{50}\right) = 0,76$ FE = 0,76 m² $V = 0,76\ m^2 \cdot 150\ m = 114\ m^3$ $114\ m^3 \cdot 2,8\ \frac{t}{m^3} = 319,2\ t$ Das Volumen des Gesteins betrug 114 m³ bei einer Masse von 319,2 Tonnen.	3 2
2d)	$A(-0,5 \mid 0)$; $B(0 \mid 1,2)$; $C(0,5 \mid 0)$ inklusive Einzeichnen in Abbildung 2  $g(x) = ax^2 + bx + c$ Symmetrie: $b = 0$ $B(0 \mid 1,2)$: $c = 1,2$ $C(0,5 \mid 0)$: $0 = a \cdot 0,5^2 + 1,2$; $a = -4,8$ $g(x) = -4,8x^2 + 1,2$	1 3
2e)	$V_{alt} = V_{neu}$; $114\ m^3 = 0,8\ m^2 \cdot x$; $x = 142,5\ m$ Der neue Tunnel ist 142,5 m lang.	2
	Summe	20

3. Aufgabe: Stochastik

Eine Supermarktkette sucht Personal für die Filialen in Altstadt und Neustadt. Für beide Städte hat sich eine unterschiedliche Anzahl an Personen beworben. Alle mussten an einem Eignungstest teilnehmen, der jeweils mit einer Schulnote bewertet wurde. Die Ergebnisse beider Städte sind hier dargestellt:

Zusammengefasste Ergebnisse der 30 Personen in **Altstadt**

Note	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Anzahl	**4**	**10**	**9**	**4**	**3**	**0**

Einzelnoten der 16 Personen in **Neustadt**

3	**1**	**4**	**2**
4	**2**	**4**	**2**
1	**3**	**2**	**3**
2	**5**	**3**	**1**

a) Bestimmen Sie für **Altstadt** den arithmetischen Mittelwert der Ergebnisse und geben Sie auch den Median und den Modalwert an.

Berechnen Sie für **Altstadt** ebenso die Standardabweichung der Ergebnisse.

b) Geben Sie für **beide Städte** getrennt die relativen Häufigkeiten der einzelnen Noten 1 bis 6 an.

Stellen Sie die relativen Häufigkeiten der Noten in beiden Städten in einem gemeinsamen geeigneten Häufigkeitsdiagramm grafisch dar.

c) Aus allen Personen aus **Altstadt**, die die Note 1 oder 2 erreicht haben, sollen drei zum Probearbeiten am nächsten Tag zufällig ausgewählt werden.

Verdeutlichen Sie den Auswahlprozess in einem geeigneten vollständig beschrifteten Baumdiagramm und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_1: Alle drei Personen haben die Note 1.

E_2: Die drei Personen haben nicht alle die gleiche Note.

d) Alle Personen aus **Neustadt**, die bessere Noten als 4 erreicht haben, sollen in Vierergruppen zu Einstellungsgesprächen eingeladen werden.

Bestimmen Sie die Anzahl an Möglichkeiten für die Zusammenstellung der ersten Vierergruppe.

Ermitteln Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, vier Personen nacheinander zu Einzelgesprächen in den Raum zu bitten.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	5	5	7	3	20

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>3a)</td><td>

arithmetischer Mittelwert: $\bar{x} = \frac{4\cdot 1+10\cdot 2+9\cdot 3+4\cdot 4+3\cdot 5}{30} = \frac{41}{15} \approx 2{,}73$

Median: 3

Modalwert: 2

Varianz: $s^2 = \frac{4\cdot(1-2{,}73)^2 + 10\cdot(2-2{,}73)^2 + 9\cdot(3-2{,}73)^2 + 4\cdot(4-2{,}73)^2 + 3\cdot(5-2{,}73)^2}{30} \approx 1{,}33$

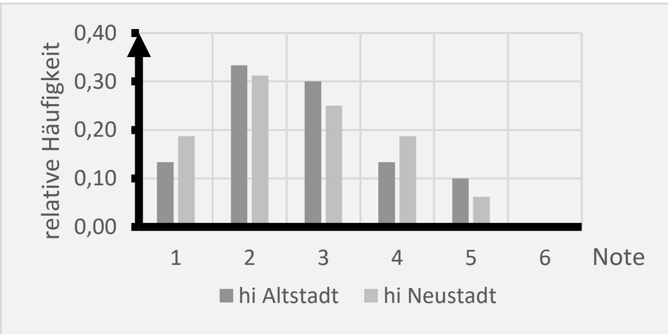
Standardabweichung: $s = \sqrt{1{,}33} \approx 1{,}15$

Hinweis: Bei Benutzung der n-1-Formel ergibt sich $s = \sqrt{1{,}37} \approx 1{,}17$.

</td><td>1
1
1

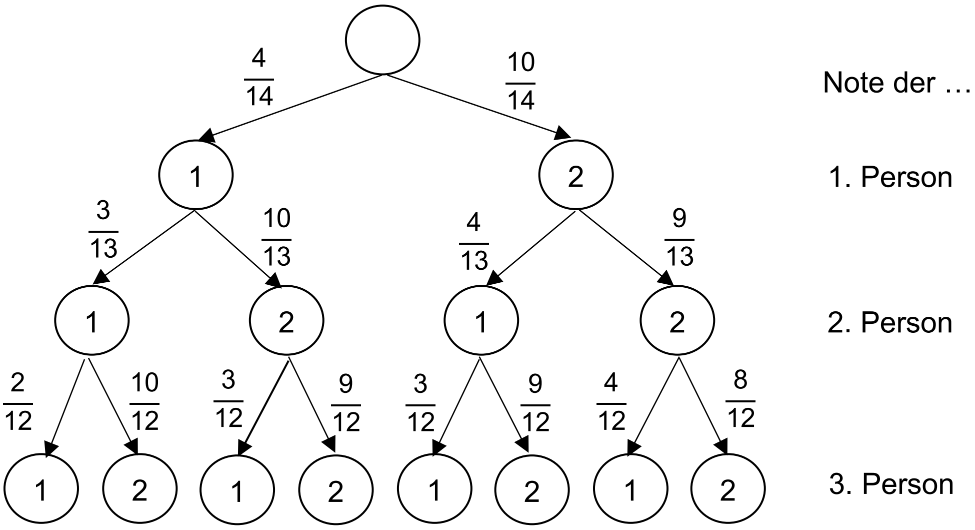
2</td></tr>
<tr><td>3b)</td><td>

<table>
<tr><td>Note</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>h_i Altstadt</td><td>0,13</td><td>0,33</td><td>0,30</td><td>0,13</td><td>0,10</td><td>0,00</td></tr>
<tr><td>h_i Neustadt</td><td>0,19</td><td>0,31</td><td>0,25</td><td>0,19</td><td>0,06</td><td>0,00</td></tr>
</table>



</td><td>2

3</td></tr>
<tr><td>3c)</td><td>



$P(E_1) = \frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12} = \frac{1}{91} \approx 1{,}10\ \%$

$P(E_2) = 1 - \left(\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12} + \frac{10}{14}\cdot\frac{9}{13}\cdot\frac{8}{12}\right) = \frac{60}{91} \approx 65{,}93\ \%$

</td><td>4

1

2</td></tr>
</table>

3d)	$C_{12}^{4} = \frac{12!}{4! \cdot (12-4)!} = 495$ Es gibt 495 Möglichkeiten für die Zusammenstellung der ersten Vierergruppe. $P_4 = 4! = 24$ Es gibt 24 Möglichkeiten, die 4 Gespräche nacheinander zu führen.	2 1
	Summe	20

Gutachten zur schriftlichen Fachhochschulreifeprüfung 2024/25 im Fach Mathematik

Gutachterin/Gutachter: ______________________ ☐ Erstgutachten ☐ Zweitgutachten

Prüfling: ______________________ Klasse: __________

Schule: ______________________ Datum der Prüfung: 28.05.2025

Teil	Erwartete Leistung	BE Soll	BE Ist	Bemerkungen
1a)	Prüfen der Symmetrie Angeben des Verhaltens im Unendlichen	2 2		
1b)	Nachweisen der gegebenen Nullstelle Ermitteln der zwei weiteren Nullstellen	1 2		
1c)	Notieren der ersten bis dritten Ableitung	3		
1d)	Ermitteln der drei Nullstellen von f´ Ermitteln der Art und der Koordinaten der zwei EP Nachweisen und Angeben des Sattelpunktes Angeben des Monotonieverhaltens	3 3 3 2		
1e)	Zeichnen des Graphen von f	3		
1f)	Ermitteln des Anstiegs Bestimmen einer Tangentengleichung Angeben von zwei Schnittpunkten Tangente-Graph Einzeichnen der Tangente in das KS	1 2 2 1		
	Summe Aufgabe 1:	**30**		
2a)	Nachweisen der Tunnelbreite Nachweisen der Tunnelhöhe	2 1		
2b)	Bestimmen der Länge einer senkrechten Geraden Berechnen der Länge einer waagerechten Geraden	2 4		
2c)	Nachweisen des Tunnelquerschnitts Berechnen von Volumen und Masse des Gesteins	3 2		
2d)	Markieren und Koordinatenangabe von 3 Punkten Ermitteln einer quadratischen Funktionsgleichung	1 3		
2e)	Ermitteln der Tunnellänge	2		
	Summe Aufgabe 2:	**20**		
3a)	Bestimmen des arithm. Mittelwerts Angeben von Median und Modalwert Berechnen der Standardabweichung	1 2 2		
3b)	Angeben der relat. Häufigkeiten für 2 Städte Darstellen im gemeinsamen Häufigkeitsdiagramm	2 3		
3c)	Erstellen eines Baumdiagramms Ermitteln zweier Wahrscheinlichkeiten	4 3		
3d)	Ermitteln einer Anzahl von Auswahlmöglichkeiten Ermitteln einer Anzahl von Anordnungen	2 1		
	Summe Aufgabe 3:	**20**		
	Gesamtpunktzahl:	**70**		

Bewertungsvorschlag:

____
Datum und Unterschrift der Gutachterin/des Gutachters