LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife im Schuljahr 2016/2017

Mathematik B

22. Mai 2017 – 09:00 Uhr

Unterlagen für die Lehrkraft

1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6;\ x \in R$.
Der Graph heißt G_f.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie und ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.

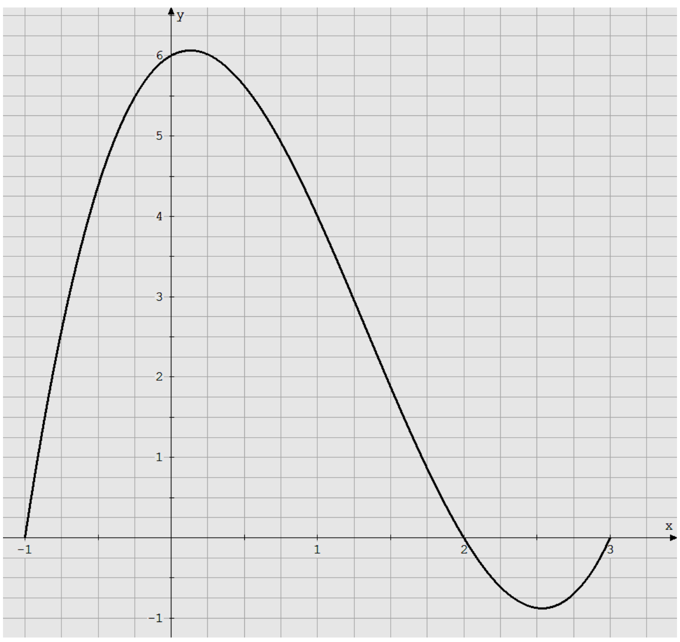
b) Berechnen Sie die Koordinaten des Hoch- und des Tiefpunktes von G_f.

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Wendepunktes von G_f und weisen Sie das Krümmungsverhalten von G_f nach.

d) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-1 \leq x \leq 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

e) Im 1. Quadranten des Koordinatensystems soll ein Rechteck so gelegt werden, dass eine Seite auf der x-Achse und eine Seite auf der y-Achse liegt. Ein Eckpunkt des Rechteckes ist der Koordinatenursprung O, der gegenüberliegende Eckpunkt $P(x \mid f(x))$ mit $0 < x < 2$ liegt auf G_f. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass die Rechtecksfläche maximal wird.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	7	6	5	3	6	27

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1a)	Da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten von x in der Funktionsgleichung auftreten, liegt weder Punktsymmetrie zum Ursprung noch Achsensymmetrie zur y-Achse vor.	2
	Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0\|6)$	1
	Schnittpunkte mit der x-Achse: über Polynomdivision $N_1(-1\|0)$ $N_2(2\|0)$ $N_3(3\|0)$	4
1b)	$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$ $f''(x) = 6x - 8$ $f'''(x) = 6$	1
	Extrempunkte: $0 = 3x^2 - 8x + 1$ $x_{E1} \approx 0{,}13$ $x_{E2} \approx 2{,}54$ $f''(0{,}13) = -7{,}22 < 0$ $f(0{,}13) \approx 6{,}06$ $H(0{,}13\,\|\,6{,}06)$ $f''(2{,}54) = 7{,}24 > 0$ $f(2{,}54) \approx -0{,}88$ $T(2{,}54\,\|-0{,}88)$	5
1c)	Wendepunkt: $0 = 6x - 8$ $x_W = \frac{4}{3}$ $f'''\left(\frac{4}{3}\right) = 6 \neq 0$ $f\left(\frac{4}{3}\right) \approx 2{,}59$ $W\left(\frac{4}{3}\,\|\,2{,}59\right)$	3
	Krümmung: $x < x_W$: G_f rechtsgekrümmt $x_W < x$: G_f linksgekrümmt (Nachweis z.B. über Teststellen der zweiten Ableitung)	2
1d)		3

1e)	$A(x)=x\cdot y$ $A(x)=x\cdot\left(x^3-4x^2+x+6\right)$ $A(x)=x^4-4x^3+x^2+6x$ $A'(x)=4x^3-12x^2+2x+6$	2
	$0=4x^3-12x^2+2x+6$ durch Probieren: $x_1=1$ Polynomdivision: $(4x^3-12x^2+2x+6):(x-1)=4x^2-8x-6$ $0=4x^2-8x-6$ $0=x^2-2x-1{,}5$ $x_2\approx 2{,}58$ $x_3\approx -0{,}58$ (x_2 und x_3 entfallen als Lösung, da außerhalb des vorgegebenen Intervalls)	2
	$A''(x)=12x^2-24x+2$ $A''(1)=-10<0$ Maximum: $P(1\|4)$	2
	Summe	27

2. Aufgabe: Anwendung der Differential- und Integralrechnung

Der nördliche Abschnitt einer Motorsport-Rennstrecke lässt sich durch eine ganzrationale Funktion f beschreiben mit

$$f(x) = -\frac{1}{50}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{23}{2}x - 6\ ;\ x \in R.$$

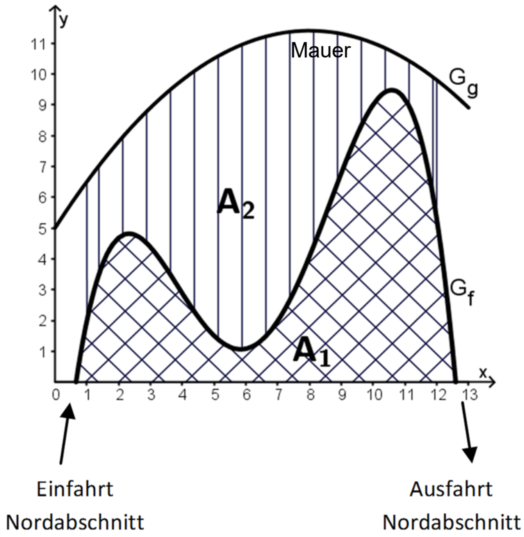
Der Graph von f heißt G_f (vgl. Abbildung) und schneidet die x-Achse an den Stellen $x_1 \approx 0{,}66$ und $x_2 \approx 12{,}60$.

Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 10 m.

Das Streckengelände wird nördlich durch eine Mauer begrenzt, deren Verlauf durch die Funktion g mit

$$g(x) = -\frac{1}{10}x^2 + \frac{8}{5}x + 5\ ;\ x \in R$$

beschrieben werden kann. Ihr Graph heißt G_g.



a) Im gesamten Innenbereich des Nordabschnitts soll Rasen angesät werden. Geben Sie die Größe der Rasenfläche in m² an. Ermitteln Sie dazu den Inhalt der Fläche A_1, die von G_f und der x-Achse eingeschlossen wird.

b) Zwischen Rennstrecke und Begrenzungsmauer soll zur Erhöhung der Sicherheit der Fahrer ein Kiesbett im Intervall $1 \le x \le 12$ angelegt werden (vgl. A_2 in der Abbildung). Berechnen Sie die notwendige Kiesmenge in m^3 bei einer Kiesschichthöhe von 30 cm.

c) Der nördliche Abschnitt der Rennstrecke beginnt mit einer Rechtskurve. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes R, an dem diese in die anschließende Linkskurve übergeht.

d) Zur Erhöhung der Sicherheit wollen die Streckenbetreiber an bestimmten Stellen der Begrenzungsmauer Strohballen aufstellen. Bestimmen Sie den Aufprallpunkt Q eines Rennautos an der Streckenbegrenzung G_g, wenn das Fahrzeug im Punkt P(10|9) von der Strecke G_f abkommt und geradlinig weiterfährt. Stellen Sie dazu zunächst eine Gleichung der Tangente t an G_f in P auf.

(zur Kontrolle: $t(x) = 1{,}5x - 6$)

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	4	6	4	6	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)	$F(x) = -\frac{1}{250}x^5 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{23}{4}x^2 - 6x$ $A_1 = \int_{0,66}^{12,60} f(x)dx = [F(x)]_{0,66}^{12,60} \approx 50{,}38 - (-1{,}82) = 52{,}2\,\text{FE}$ Der Innenbereich des Nordabschnitts hat einen Flächeninhalt von 5220 m².	4
2b)	$h(x) = g(x) - f(x) = \frac{1}{50}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{39}{10}x^2 - \frac{99}{10}x + 11$ $H(x) = \frac{1}{250}x^5 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{39}{30}x^3 - \frac{99}{20}x^2 + 11x$ $A_2 = \int_{1}^{12} h(x)dx = [H(x)]_1^{12} \approx 68{,}93 - 7{,}23 = 61{,}7\,\text{FE} \quad \triangleq 6170\,\text{m}^2$ Kiesmenge: 6170 m² · 0,3 m = 1851 m³ Es werden 1851 m³ Kies benötigt.	5 1
2c)	$f'(x) = -\frac{2}{25}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8x + \frac{23}{2}; \quad f''(x) = -\frac{6}{25}x^2 + 3x - 8; \quad f'''(x) = -\frac{12}{25}x + 3$ $f''(x) = -\frac{6}{25}x^2 + 3x - 8 = 0$ $x^2 - \frac{25}{2}x + \frac{100}{3} = 0$ $x_1 \approx 8{,}64 \quad x_2 \approx 3{,}86$ Der Übergang befindet sich bei x_2. $f'''(3{,}86) \approx 1{,}15 \neq 0$ $f(3{,}86) \approx 3{,}11 \quad R(3{,}86 \mid 3{,}11)$	4
2d)	$f'(10) = 1{,}5 \quad t(x) = 1{,}5x - 6$ Aufprallpunkt: $t(x) = g(x)$ $1{,}5x - 6 = -\frac{1}{10}x^2 + \frac{8}{5}x + 5$ $x^2 - x - 110 = 0$ $x_1 = 11 \quad x_2 = -10$ Die Stelle x_2 liegt nicht im betrachteten Streckenabschnitt. $t(11) = g(11) = 10{,}5$ Der Aufprallpunkt befindet sich in Q(11|10,5).	2 4
	Summe	20

3. Aufgabe: Analytische Geometrie

In einem kartesischen räumlichen Koordinatensystem sind die Gerade g durch die Punkte $A(4|3|1)$ und $B(1|3|2)$ sowie die Gerade h durch den Punkt $Q(-1|-5|-4)$ und den Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Geben Sie je eine Gleichung für die Gerade g und die Gerade h an. Untersuchen Sie rechnerisch die Lagebeziehung von g und h und berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes.

b) Die Punkte A, B und $C(2|7|5)$ bilden das Dreieck ABC. Weisen Sie durch Rechnung nach, dass es sich bei dem Winkel $\angle ABC$ um einen rechten Winkel handelt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Seite AB.

c) Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

d) Geben Sie eine Gleichung einer Geraden k an, die durch den Punkt $P(-2|4|0)$ und parallel zur Geraden h verläuft.

e) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D, so dass ein Rechteck ABCD entsteht.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	6	4	6	2	2	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
3a)	$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ Die Geraden g und h sind nicht parallel.	2
	$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $r = 1;\ s = 2$ r = 1 in g: $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Die Geraden g und h haben einen gemeinsamen Schnittpunkt $S(1 \mid 3 \mid 2)$	4
3b)	$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 - 3 = 0$ $\beta = 90°$	2
	$M(2{,}5 \mid 3 \mid 1{,}5)$	2
3c)	$\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4^2} = 6\,\text{LE}$ $\lvert\overrightarrow{BA}\rvert = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}16\,\text{LE}$ $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{26} \approx 5{,}10\,\text{LE}$	3
	$u = 3{,}16 + 5{,}1 + 6 = 14{,}26\,\text{LE}$	1
	$A = \frac{1}{2} \cdot 3{,}16 \cdot 5{,}1 \approx 8{,}06\,\text{FE}$	2

3d)	$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ alternative Lösungen möglich	2
3e)	$\overrightarrow{0D} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ Punkt D hat die Koordinaten $D(5 \vert 7 \vert 4)$.	2
	Summe	20

3. Aufgabe: Zahlenfolgen

Eine Zahlenfolge (a_n) ergibt sich als Quotient zweier Zahlenfolgen (b_n) und (c_n):

$$a_n = \frac{b_n}{c_n}.$$

Von den arithmetischen Zahlenfolgen (b_n) und (c_n) sind folgende Eigenschaften bekannt:

$$b_n: 5; 11; 17; \ldots \qquad \text{und} \qquad c_5 = 17;\ c_{10} = 32.$$

a) Ermitteln Sie rechnerisch eine Bildungsvorschrift für die Zahlenfolge (a_n).
(zur Kontrolle: $a_n = \frac{6n-1}{3n+2}$)

b) Berechnen Sie von (a_n) die ersten fünf Zahlenfolgenglieder und zeigen Sie, dass (a_n) weder eine arithmetische noch eine geometrische Folge ist.

c) Weisen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von (a_n) nach.

d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Zahlenfolge (a_n). Berechnen Sie, ab welchem Zahlenfolgenglied von (a_n) alle restlichen Folgenglieder in der ε – Umgebung von g liegen, wenn $\varepsilon = \frac{1}{100}$ beträgt.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	5	6	4	5	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
3a)	Zahlenfolge (b_n) mit b_n : 5; 11; 17;... $b_n = b_1 + (n-1)\cdot d$ $b_n = 5 + (n-1)\cdot 6$ $b_n = 5 + 6n - 6$ $b_n = 6n - 1$	2
	Zahlenfolge (c_n) mit $c_5 = 17$ $c_{10} = 32$: $c_{10} = c_5 + 5\cdot d$ $d = \frac{32-17}{5} = 3$ $c_1 = c_5 - 4\cdot d$ $c_1 = 5$ $c_n = c_1 + (n-1)\cdot d$ $c_n = 5 + (n-1)\cdot 3$ $c_n = 5 + 3n - 3$ $c_n = 3n + 2$ aus $a_n = \frac{b_n}{c_n}$ folgt $a_n = \frac{6n-1}{3n+2}$	3
3b)	5 Folgenglieder: $a_1 = 1$ $a_2 = \frac{11}{8} \approx 1{,}38$ $a_3 = \frac{17}{11} \approx 1{,}55$ $a_4 = \frac{23}{14} \approx 1{,}64$ $a_5 = \frac{29}{17} \approx 1{,}71$	2
	arithmetische ZF: $\frac{11}{8} - 1 = \frac{3}{8}$ $\frac{17}{11} - \frac{11}{8} = \frac{15}{88}$ $\frac{15}{88} \neq \frac{3}{8}$ d nicht konstant (a_n) keine arithmetische ZF	2
	geometrische ZF: $\frac{11}{8} : 1 = \frac{11}{8}$ $\frac{17}{11} : \frac{11}{8} = 1\frac{15}{121}$ $\frac{11}{8} \neq 1\frac{15}{121}$ q nicht konstant (a_n) keine geometrische ZF	2
3c)	Vermutung: Die Zahlenfolge ist streng monoton steigend. $a_{n+1} > a_n$ $\frac{6(n+1)-1}{3(n+1)+2} > \frac{6n-1}{3n+2}$ $\frac{6n+5}{3n+5} > \frac{6n-1}{3n+2}$ $18n^2 + 12n + 15n + 10 > 18n^2 - 3n + 30n - 5$ $10 > -5$ w. A. (a_n) ist streng monoton steigend.	4

3d)	Grenzwert g: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n-1}{3n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left(6-\frac{1}{n}\right)}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}=2=g$ (alternative Begründungen möglich)	1
	$\varepsilon-$Umgebung untersuchen: $\left\|\frac{6n-1}{3n+2}-2\right\|<\frac{1}{100}$ $\|(6n-1)-2(3n+2)\|<\frac{1}{100}\cdot(3n+2)$ $\|-5\|<\frac{3n}{100}+\frac{2}{100}$ $\|-500\|<3n+2$ $n>\frac{498}{3}=166$	3
	Ergebnis: Ab dem 167. Glied liegen alle Glieder innerhalb der $\varepsilon-$Umgebung von g.	1
	Summe	20