



LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

**Zentrale Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife
im Schuljahr 2016/2017**

Mathematik D

22. Mai 2017 – 09:00 Uhr

Unterlagen für die Lehrkraft

1. Aufgabe: Differentialrechnung

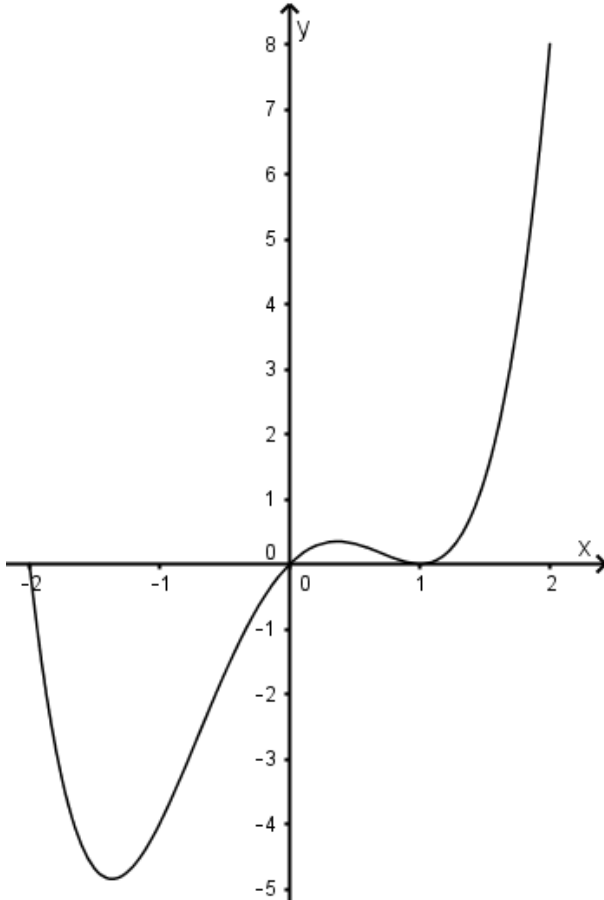
Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$; $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph heißt G_f .

- a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.
- b) Zeigen Sie, dass $x = 1$ eine Extremstelle ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller lokalen Extrempunkte und weisen Sie die Art der Extrema nach.
Geben Sie das Monotonieverhalten von G_f an.
- c) Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte und untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_f .
- d) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
- e) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung für die Tangente t an G_f an der Stelle $x_1 = -1$.
- f) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass G_f an der Stelle $x = 0$ eine Steigung von $m = 2$ besitzt.
Bestimmen Sie alle weiteren Stellen von G_f mit der gleichen Steigung.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	4	8	6	3	3	3	27

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1a)	$0 = x^4 - 3x^2 + 2x = x(x^3 - 3x + 2)$ Polynomdivision : $(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2$ $S_y = S_{x_1}(0 0) ; S_{x_2}(1 0) \text{ (doppelte Nullstelle)} ; S_{x_3}(-2 0)$	4
1b)	$f'(x) = 4x^3 - 6x + 2 ; f''(x) = 12x^2 - 6 ; f'''(x) = 24x$ $f'(x) = 0 = 4x^3 - 6x + 2$ Polynomdivision : $(4x^3 - 6x + 2) : (x - 1) = 4x^2 + 4x - 2$ $x_{E1} = 1 ; f''(1) = 6 > 0 ; f(1) = 0 ; T_1(1 0)$ $x_{E2} \approx 0,37 ; f''(0,37) \approx -4,36 < 0 ; f(0,37) \approx 0,35 ; H(0,37 0,35)$ $x_{E3} \approx -1,37 ; f''(-1,37) \approx 16,52 > 0 ; f(-1,37) \approx -4,85 ; T_2(-1,37 -4,85)$ Monotonie: $-\infty < x < -1,37$ f ist streng monoton fallend $-1,37 < x < 0,37$ f ist streng monoton steigend $0,37 < x < 1$ f ist streng monoton fallend $1 < x < \infty$ f ist streng monoton steigend	1 2 3 2
1c)	$f''(x) = 0 = 12x^2 - 6$ $x_{W1} \approx 0,71 ; f'''(0,71) = 17,04 \neq 0 ; f(0,71) \approx 0,16 ; W_1(0,71 0,16)$ $x_{W2} \approx -0,71 ; f'''(-0,71) = -17,04 \neq 0 ; f(-0,71) \approx -2,68 ; W_2(-0,71 -2,68)$ $-\infty < x < -0,71 ; f''(-1) = 6 > 0 ;$ links gekrümmt $-0,71 < x < 0,71 ; f''(0) = -6 < 0 ;$ rechts gekrümmt $0,71 < x < +\infty ; f''(1) = 6 > 0 ;$ links gekrümmt	3 3

<p>1d)</p>		<p>3</p>
<p>1e)</p>	<p>$y = mx + n$ t: $m = f'(-1) = 4$; $f(-1) = -4$; $-4 = 4 \cdot (-1) + n$; $n = 0$; $y = 4x$</p>	<p>3</p>
<p>1f)</p>	<p>Nachweis der Steigung an der Stelle 0: $f'(x) = 4x^3 - 6x + 2$ $f'(0) = 2$</p> <p>Finden weiterer Stellen mit der Steigung 2: $f'(x) = 2$ $2 = 4x^3 - 6x + 2$ $0 = 4x^3 - 6x = x(4x^2 - 6)$</p> <p>$x_1 = 0$; $x_2 \approx 1,22$; $x_3 \approx -1,22$</p>	<p>1</p> <p>2</p>
	<p>Summe</p>	<p>27</p>

2. Aufgabe: Integralrechnung

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$; $x \in \mathbb{R}$.

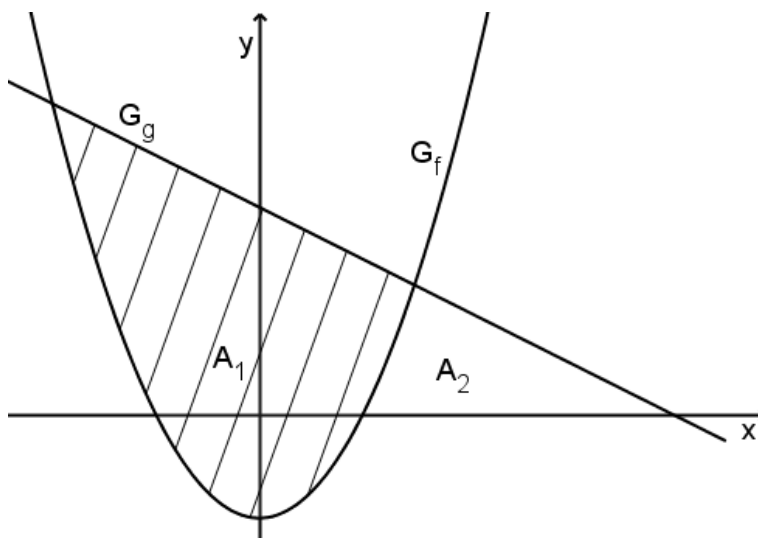
Ihre Graphen heißen G_f und G_g .

- a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Graphen G_f und G_g an den Stellen $x_1 = 3$ und $x_2 = -4$ schneiden.

- b) Bestimmen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Fläche A_1 , die von beiden Graphen vollständig eingeschlossen wird (siehe Abbildung).

- c) Die Fläche A_2 wird von den Graphen beider Funktionen und der x -Achse eingeschlossen (siehe Abbildung). Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts von A_2 .

- d) Der Graph G_f rotiert im Intervall $-1 \leq x \leq 2$ um die x -Achse. Ermitteln Sie die Volumenmaßzahl des so entstehenden Rotationskörpers.

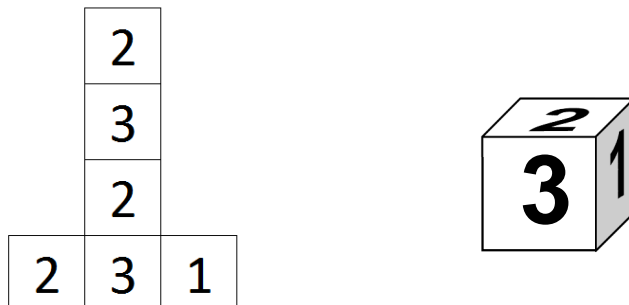


Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	3	5	7	5	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)	$\frac{1}{2}x^2 - 2 = -\frac{1}{2}x + 4$ $x^2 + x - 12 = 0$ $x_1 = 3; x_2 = -4$	3
2b)	$h(x) = g(x) - f(x) = -\frac{1}{2}x + 4 - \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 6$ $H(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 6x$ $A = \int_{-4}^3 h(x) dx = [H(x)]_{-4}^3 = \left(\frac{45}{4}\right) - \left(-\frac{52}{3}\right) \approx 28,58 \text{ FE}$	3 2
2c)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$ $x_{1,2} = \pm 2$ $g(x) = -\frac{1}{2}x + 4 = 0$ $x = 8$ <p>Schnittstelle $x_1 = 3$ aus a)</p> $A_1 = \int_2^3 f(x) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - 2x\right]_2^3 = -\frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{7}{6} \approx 1,17 \text{ FE}$ $A_2 = \int_3^8 g(x) dx = \left[-\frac{1}{4}x^2 + 4x\right]_3^8 = 16 - 9,75 = 6,25 \text{ FE}$ $A_{\text{gesamt}} = A_1 + A_2 = 7,42 \text{ FE}$	2 5
2d)	$[f(x)]^2 = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$ $V = \pi \cdot \int_{-1}^2 [f(x)]^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 4x\right]_{-1}^2 = \pi \cdot \left(\frac{64}{15} + \frac{203}{60}\right) = 7,65\pi \approx 24,03 \text{ VE}$	5
	Summe	20

3. Aufgabe: Stochastik

Ein regulärer Würfel besitzt das abgebildete Netz mit den Ziffern 1, 2 und 3. Dieser Würfel wird pro Spiel zweimal geworfen.



- a) Stellen Sie eine geeignete Ergebnismenge Ω für diesen Zufallsversuch auf.
- b) Zeichnen Sie für diesen Zufallsversuch ein Baumdiagramm.
Die Summe der beiden Wurfresultate eines Spiels nennt man Augensumme. Geben Sie für alle möglichen Augensummen die Wahrscheinlichkeiten an.
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse in einem Spiel:

E: Die Eins fällt höchstens einmal.

F: Die Augensumme ist gerade.

- d) In einem Gewinnspiel erhält man 2 Euro, wenn mindestens einmal eine Eins gewürfelt wurde und 8 Euro, wenn zweimal eine Drei fällt.

Welchen Einsatz muss der Spielleiter mindestens verlangen, damit er keinen Verlust macht?

- e) Beim Probendurchlauf von 15 Spielen ergeben sich die folgenden Augensummen:

4	5	4	4	5
2	4	5	4	3
4	5	3	5	6

Ermitteln Sie rechnerisch das arithmetische Mittel und die Standardabweichung für diese Stichprobe.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	1	8	4	3	4	20

3e)	$\bar{x} = \frac{6 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 + 6}{15} = \frac{63}{15} = 4,2$ $s^2 = \frac{1}{15} \cdot [6 \cdot (4 - 4,2)^2 + 5 \cdot (5 - 4,2)^2 + 2 \cdot (3 - 4,2)^2 + (2 - 4,2)^2 + (6 - 4,2)^2] = 0,96$ $s \approx 0,98$ <p>(für n-1: $s^2 \approx 1,0286$ $s \approx 1,0142$)</p>	2
	Summe	20