LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife im Schuljahr 2013/2014

Mathematik A

28. Mai 2014 – 09:00 Uhr

Unterlagen für die Lehrkraft

1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^3 - x^2 - 2{,}5x + 3;\ x \in R$.
Der Graph heißt G_f.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und weisen Sie die Art der Extrema nach. Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von G_f.

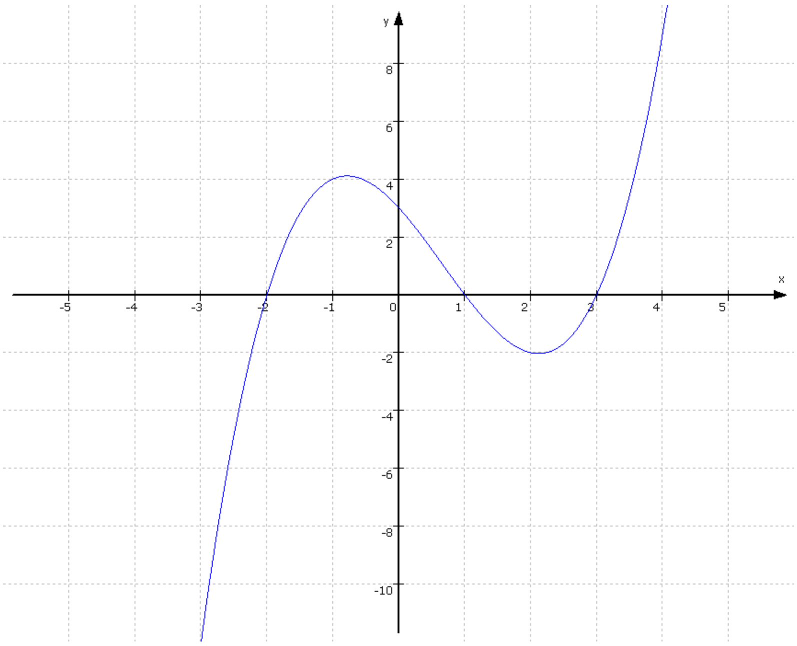
c) Zeichnen Sie den Graphen G_f im Intervall $-3 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

d) Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes der Fläche, die von G_f und der x-Achse vollständig eingeschlossen wird.

e) Gegeben ist eine weitere Funktion g mit $g(x) = -f(x)$. Geben Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus den Teilaufgaben b) und d) die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von g an. Bestimmen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g vollständig eingeschlossen wird.

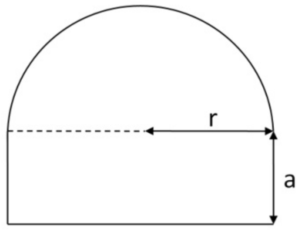
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	5	9	3	5	5	27

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	Schnittpunkt mit der y-Achse: $P_y(0\,\vert\,3)$	1
	Schnittpunkte mit der x-Achse: z.B. über Polynomdivision $0 = 0{,}5(x-1)(x+2)(x-3)$ $N_1(-2\,\vert\,0)\quad N_2(1\,\vert\,0)\quad N_3(3\,\vert\,0)$	4
b)	$f'(x) = 1{,}5x^2 - 2x - 2{,}5$ $f''(x) = 3x - 2$ $f'''(x) = 3$	1
	Extrempunkte: $0 = x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \quad x_{E_1} \approx -0{,}79 \quad x_{E_2} \approx 2{,}12$ $f''(-0{,}79) = -4{,}37 < 0 \quad f(-0{,}79) \approx 4{,}10 \quad H(-0{,}79\,\vert\,4{,}10)$ $f''(2{,}12) = 4{,}36 > 0 \quad f(2{,}12) \approx -2{,}03 \quad T(2{,}12\,\vert\,-2{,}03)$	5
	Wendepunkt: $0 = 3x - 2 \quad x_W \approx 0{,}67 \quad f'''(0{,}67) = 3 \neq 0 \quad f(0{,}67) \approx 1{,}03 \quad W(0{,}67\,\vert\,1{,}03)$	3

c)		3
d)	Flächenberechnung: $A_1 = \int_{-2}^{1}(0{,}5x^3 - x^2 - 2{,}5x + 3)dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 3x\right]_{-2}^{1} = \frac{37}{24} - \left(-\frac{19}{3}\right) = \frac{63}{8}$ $\lvert A_2 \rvert = \left\lvert \int_{1}^{3} f(x)dx \right\rvert = \left\lvert -\frac{9}{8} - \frac{37}{24} \right\rvert = \left\lvert -\frac{8}{3} \right\rvert \approx \lvert -2{,}67 \rvert \approx 2{,}67$ $A_{Ges} = A_1 + \lvert A_2 \rvert = 7{,}88 + 2{,}67 = 10{,}55\,FE$	5
e)	Funktion g: $g(x) = -f(x)$ Extremstellen bleiben gleich, nur die Funktionswerte ändern ihr Vorzeichen, Hochpunkt und Tiefpunkt werden vertauscht: $T_g(-0{,}79 \mid -4{,}10) \quad H_g(2{,}12 \mid 2{,}03)$ Fläche zwischen den Graphen von f und g: $A_{fg} = 2 \cdot A_f = 2 \cdot 10{,}55 = 21{,}1\,FE$	4 1
	Summe	27

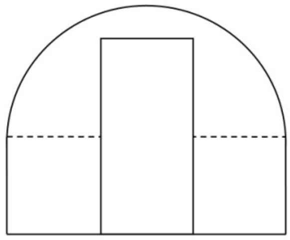
2. Aufgabe: Anwendungsaufgabe (Skizzen nicht maßstabsgerecht)

Für ein neu zu bauendes Bürogebäude plant man ein Bodenfenster, das die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten soll. (Skizze 1)



a) Berechnen Sie die Fensterfläche in m^2, wenn in der ersten Planung eine Gesamtbreite von 3 m und eine Gesamthöhe von 2,5 m festgelegt wurden.

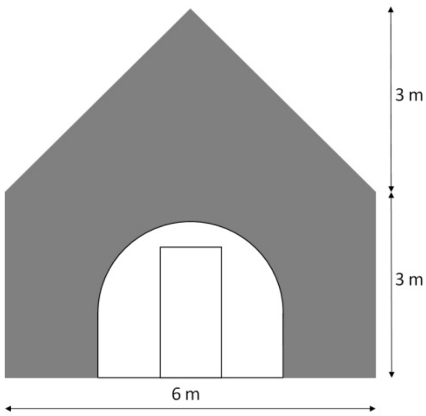
In dieses Bodenfenster soll in der Mitte eine rechteckige Glastür mit einer Breite von 1 m und einer Höhe von 2,10 m eingearbeitet werden. Diese so geplante Glasfläche soll einen attraktiven Eingangsbereich des Bürogebäudes bilden. (Skizze 2)



b) Für die Tür wird Sicherheitsglas (100 € pro m^2) und für die restliche Verglasung Standardglas (75 € pro m^2) geplant. Wie hoch sind die geplanten Glaskosten bei einer Gesamtfläche von 6,53 m^2?
Berechnen Sie den Anstieg der Kosten in Prozent, wenn man sich für eine Glasfirma, die in ihrem Angebot für das gesamte Glasmaterial 650 € veranschlagt, entscheidet?

Der geplante Eingangsbereich befindet sich im Giebel des Bürogebäudes. (Skizze 3)

c) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Eingangsbereich von der gesamten Giebelfläche einnimmt.



In der zweiten Planungsphase wurde für den Umfang dieses Bodenfensters 10 m festgelegt, um die Baukosten möglichst gering zu halten. Außerdem wird eine maximale Glasfläche angestrebt, um den Lichteinfall in das Gebäude zu optimieren.

d) Erstellen Sie eine Funktion, die den Flächeninhalt A dieses Fensters in Abhängigkeit vom Radius r des Halbkreises beschreibt. (Skizze 1)

(zur Kontrolle: $A(r) = (-2 - \frac{\pi}{2}) \cdot r^2 + 10 \cdot r$)

e) Berechnen Sie die Maße r und a so, dass die verglaste Fläche und damit der Lichteinfall am größten wird. Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes der Glasfläche.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	3	4	2	4	6	19

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	$A = A_{Rechteck} + A_{Halbkreis} = a \cdot 2r + \frac{\pi}{2} r^2 = 1 \cdot 2 \cdot 1{,}50 + \frac{\pi}{2} \cdot 1{,}50^2 \approx 6{,}53$ Der verglaste Eingangsbereich besteht aus etwa 6,53 m^2 Fläche.	3
b)	Geplante Glaskosten: $6{,}53\ m^2 - 2{,}1\ m^2 = 4{,}43\ m^2$ $4{,}43 \cdot 75 + 2{,}1 \cdot 100 = 542{,}25$ Die geplanten Glaskosten betragen 542,25 €. $\frac{542{,}25}{100} = \frac{650}{x}$ $x \approx 119{,}87$ Die Kosten würden um 19,87 % steigen.	4
c)	$A_{Giebel} = 6\ m \cdot 3\ m + \frac{6\ m \cdot 3\ m}{2} = 27\ m^2$ $\frac{x}{6{,}53\ m^2} = \frac{100\ \%}{27\ m^2} \quad x \approx 24{,}19\ \%$ Der Eingangsbereich nimmt etwa 24,19 % des Giebels ein.	2
d)	$A(a,r) = a \cdot 2r + \frac{\pi}{2} r^2$ $U = 10 = 2a + 2r + \pi r$ $a = 5 - r - \frac{\pi r}{2}$ $A(r) = (5 - r - \frac{\pi}{2} r) \cdot 2r + \frac{\pi}{2} r^2 = 10 \cdot r + (-2 - \frac{\pi}{2}) \cdot r^2$	4

e)	Extremwertberechnung: $A'(r) = 10 - 4r - \pi r$ $0 = A'(r)$ $r = \frac{10}{4+\pi} \approx 1{,}40$ $A''(r) = -4 - \pi$ $A''(1{,}40) = -4 - \pi < 0 \quad$ Maximum $a = 5 - 1{,}40 - \frac{\pi \cdot 1{,}40}{2} \approx 1{,}40$ $A(1{,}40) \approx 7{,}00$ Radius und Rechteckhöhe sind für diesen Eingangsbereich mit jeweils 1,4 m zu wählen, wenn bei möglichst großer Fläche die Umrahmung nur 10 m haben soll. Die Fläche beträgt 7 m^2.	6
	Summe	19

3. Aufgabe: Stochastik

Ein Hersteller von Motorradhelmen hat für die Produktion eines neu entwickelten Modells die Maschinen programmiert und eingestellt.

a) Die Massen der vier Testhelme des ersten Probelaufs wurden mit folgenden Ergebnissen gemessen: 1112 g, 1101 g, 1108 g, 998 g. Ermitteln Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung dieser Werte.

b) Im zweiten Probelauf ergab die Kontrolle der Massen von 20 Helmen folgende Ergebnisse (in Gramm):

1091	1100	1131	1061	1099	1080	1113	1078	1105	1111
1095	1120	1070	1092	1140	1105	1070	1107	1079	1107

Teilen Sie die Helme des zweiten Probelaufs nach ihrer Masse in fünf gleich breite Klassen von 1061 g bis 1140 g ein.

Stellen Sie die relative Häufigkeitsverteilung der Klassen grafisch dar.

Ermitteln Sie den arithmetischen Mittelwert bezüglich der Klasseneinteilung.

c) In der laufenden Produktion wird jeder Helm nacheinander drei Tests unterzogen. Die Wahrscheinlichkeiten der Testergebnisse sind aus statistischen Untersuchungen bekannt:

I. Test der Masse mit den drei möglichen Ergebnissen: A (85 %), B (14 %) und C (1 %)
II. Oberflächentest mit den drei möglichen Ergebnissen: A (80 %), B (19 %) und C (1 %)
III. Funktionstest mit den zwei möglichen Ergebnissen: A (95 %) oder C (5 %)

Helme, die einen Test mit „C“ absolvieren, werden sofort aussortiert. Stellen Sie den Durchlauf der Helme durch die drei Tests in einem Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten dar.

Helme, die alle drei Tests mit „A“ bestehen, werden als „erste Wahl“ verkauft. Helme, die mindestens einen Test mit „C“ absolvieren sind unverkäuflich. Alle anderen Helme werden als „2. Wahl“ eingestuft. Ermitteln Sie den Anteil der Helme erster Wahl, zweiter Wahl und der unverkäuflichen Helme an der Gesamtproduktion.

Wie viele Helme müssten produziert werden, um 1000 Helme erster Wahl an den Handel liefern zu können?

Aufgabenteil	a)	b)	c)	Summe
Punkte	4	8	8	20

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

$$\bar{x} = \frac{1112+1101+1108+998}{4} = 1079{,}75$$

$$s^2 = \frac{(1112-1079{,}75)^2+(1101-1079{,}75)^2+(1108-1079{,}75)^2+(998-1079{,}75)^2}{3}$$

$$s^2 = \frac{8972{,}75}{3} \approx 2990{,}92$$

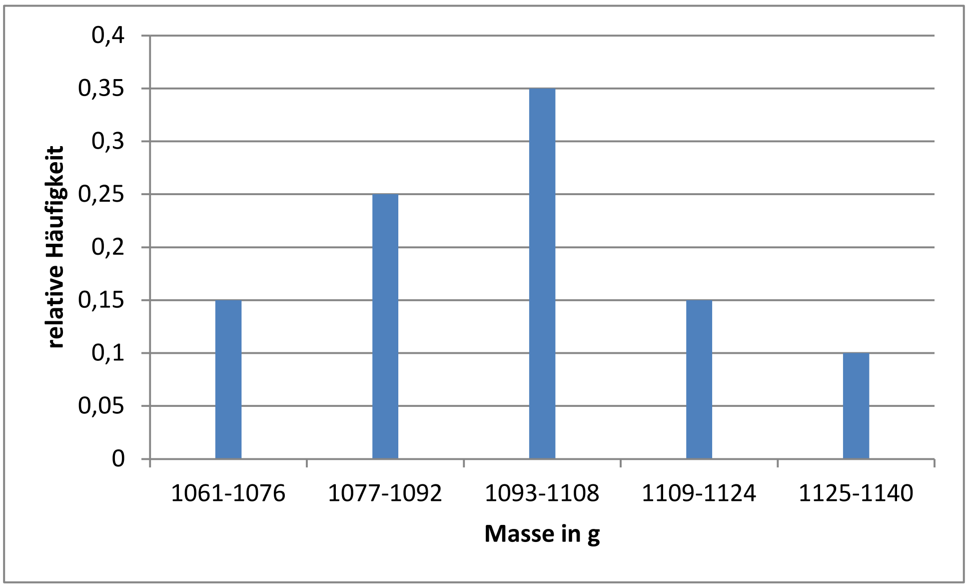
$$s = \sqrt{2990{,}92} \approx 54{,}69$$

Der Mittelwert der Helmmassen beträgt 1079,75 g und die Standardabweichung beträgt 54,69 g.

(Alternativ: für n=4 gilt s=47,36)

</td><td>4</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Klasse	1	2	3	4	5
Werte	1061-1076	1077-1092	1093-1108	1109-1124	1125-1140
H_i	3	5	7	3	2
h_i	0,15	0,25	0,35	0,15	0,1

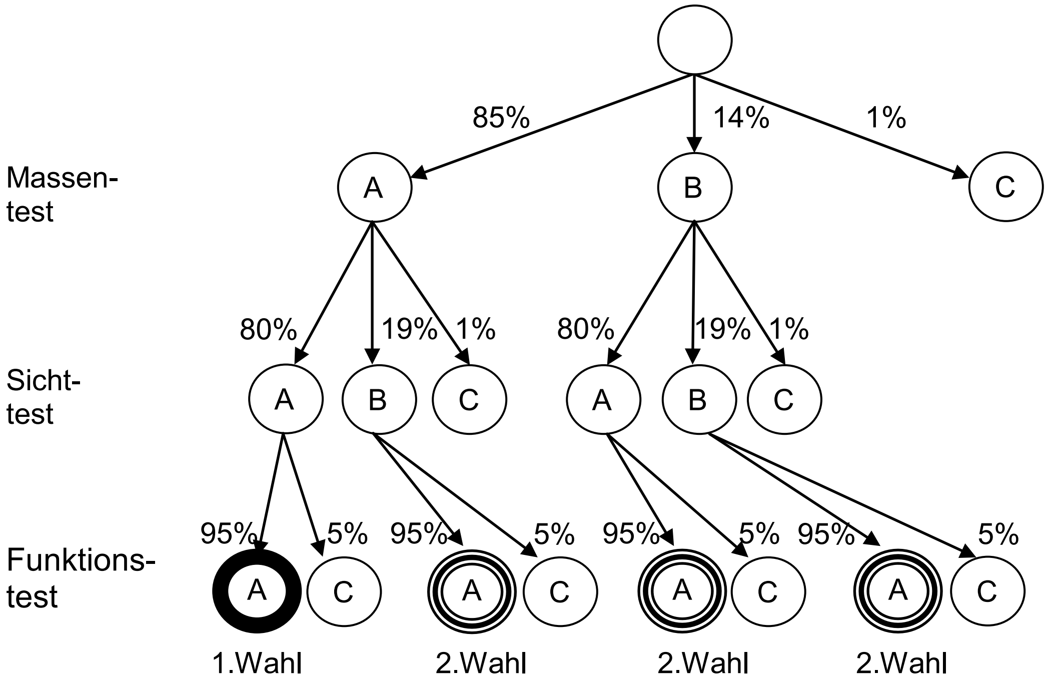


$$\bar{x} = \frac{3\cdot1068{,}5+5\cdot1084{,}5+7\cdot1100{,}5+3\cdot1116{,}5+2\cdot1132{,}5}{20} = \frac{21946}{20} = 1097{,}30$$

Der Mittelwert der Helmmassen beträgt 1097,30 g.

</td><td>4
3
1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>c)</td><td>



</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>

$P(1.\text{Wahl}) = 85\,\% \cdot 80\,\% \cdot 95\,\% = 64{,}6\,\%$

$P(2.\text{Wahl}) = 85\,\% \cdot 19\,\% \cdot 95\,\% + 14\,\% \cdot 80\,\% \cdot 95\,\% + 14\,\% \cdot 19\,\% \cdot 95\,\% \approx 28{,}51\,\%$

$P(\text{Fehlteil}) = 1 - (P(1.\text{Wahl}) + P(2.\text{Wahl})) = 1 - (64{,}6\,\% + 28{,}51\,\%) = 6{,}89\,\%$

Der Anteil der Helme 1. und 2. Wahl beträgt 64,6 % bzw. 28,51 %. 6,89 % der Helme sind unverkäuflich.

</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>

$64{,}6\,\% \cdot x = 1000$

$x \approx 1547{,}99$

1548 Helme müssten mindestens produziert werden.

</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>20</td></tr>
</table>