LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife im Schuljahr 2013/2014

Mathematik B

28. Mai 2014 – 09:00 Uhr

Unterlagen für die Lehrkraft

1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12;\ x \in R$.
Der Graph heißt G_f.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von G_f.

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass $x_E = -\frac{1}{2}$ eine Extremstelle von G_f ist. Berechnen Sie die Koordinaten aller lokalen Extrempunkte von G_f und ermitteln Sie die Art der Extrema.

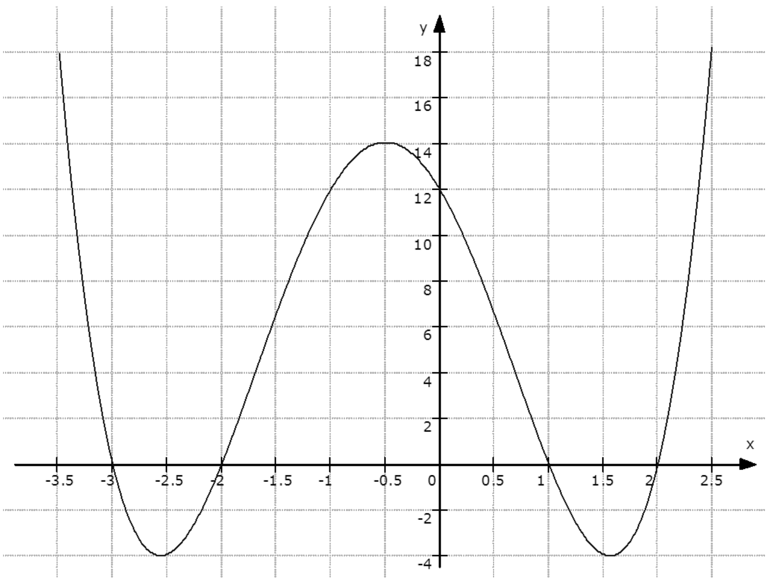
c) Zeichnen Sie den Graphen G_f im Intervall $-3{,}5 \le x \le 2{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

d) Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung für die Tangente t an G_f an der Stelle x = 0. Die Tangente t und die Koordinatenachsen begrenzen ein Dreieck vollständig. Berechnen Sie die Maßzahlen für den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks.

(zur Kontrolle: $t(x) = -8x + 12$)

e) Berechnen Sie alle weiteren Stellen, an denen zu t parallele Tangenten an G_f existieren.

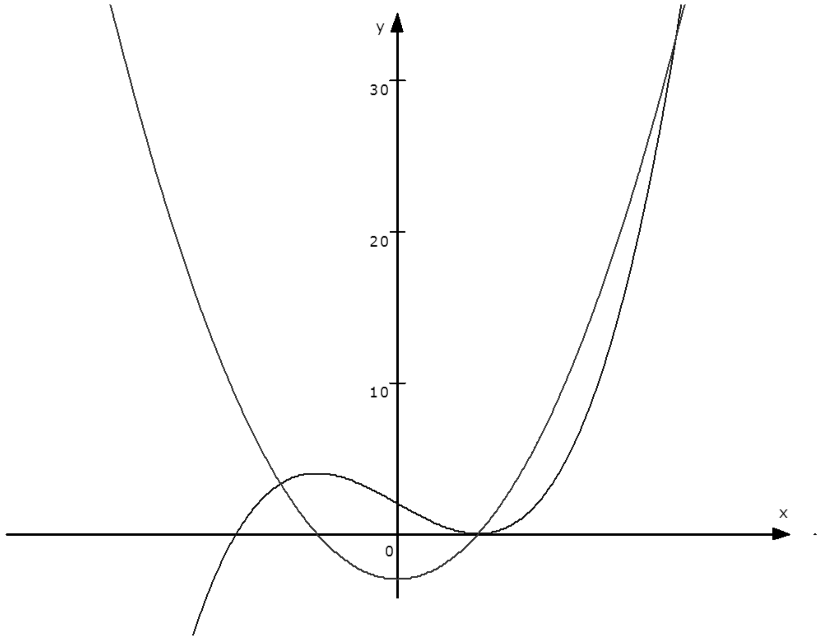
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	6	8	3	6	4	27

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	Koordinaten der Achsenschnittpunkte: $S_y(0 \mid 12)$ $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ durch Probieren $(x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12) : (x - 1) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ $(x^3 + 3x^2 - 4x - 12) : (x - 2) = x^2 + 5x + 6$ $N_1(1 \mid 0); N_2(2 \mid 0); N_3(-2 \mid 0); N_4(-3 \mid 0)$ (alternative Lösungswege möglich)	1 5
b)	Nachweis Extremstelle $x_E = -\frac{1}{2}$: $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 14x - 8$; $f'(-\frac{1}{2}) = 0$ $f''(x) = 12x^2 + 12x - 14$; $f''(-\frac{1}{2}) = -17 < 0$ $f(-0{,}5) = 14{,}06$; $H(-0{,}5 \mid 14{,}06)$ $0 = 4x^3 + 6x^2 - 14x - 8$ $(4x^3 + 6x^2 - 14x - 8) : (x + \frac{1}{2}) = 4x^2 + 4x - 16$ $x_{E_2} \approx -2{,}56$; $x_{E_3} \approx 1{,}56$ $f''(-2{,}56) \approx 33{,}92 > 0$; $f(-2{,}56) \approx -4$; $T(-2{,}56 \mid -4)$ $f''(1{,}56) \approx 33{,}92 > 0$; $f(1{,}56) \approx -4$; $T(1{,}56 \mid -4)$	1 1 1 2 3
c)	Graph G_f  	3

d)	Tangentengleichung: $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 14x - 8$; $f'(0) = -8 = m$ $f(0) = 12 = n$; $t(x) = -8x + 12$	2
	Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} x \cdot y$; $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{8} \cdot 12$; A = 9 FE	2
	Umfang: $u = x + y + z$; $z = \sqrt{12^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{146{,}25} \approx 12{,}09$ $u = 1{,}5 + 12 + 12{,}09 = 25{,}59$ LE	2
e)	Berechnung der x-Werte: $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 14x - 8$ $-8 = 4x^3 + 6x^2 - 14x - 8$ $0 = 4x^3 + 6x^2 - 14x$; $x_1 = 0$ $0 = 4x^2 + 6x - 14$; $x_2 \approx -2{,}77$ $x_3 \approx 1{,}27$	4
	Summe	27

2. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x + 2;\ x \in R$ und die zugehörige Funktion der ersten Ableitung f'. Die Graphen der Funktionen verfügen über eine gemeinsame ganzzahlige Nullstelle $x = 1$. In der Darstellung sind die Graphen der Funktionen f und f' abgebildet.



a) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Funktion f und weisen Sie die Art der Extrema nach.

b) Beschreiben Sie das Monotonieverhalten des Graphen der Funktion f. Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Die Graphen der Funktionen f und f' schneiden sich. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte.

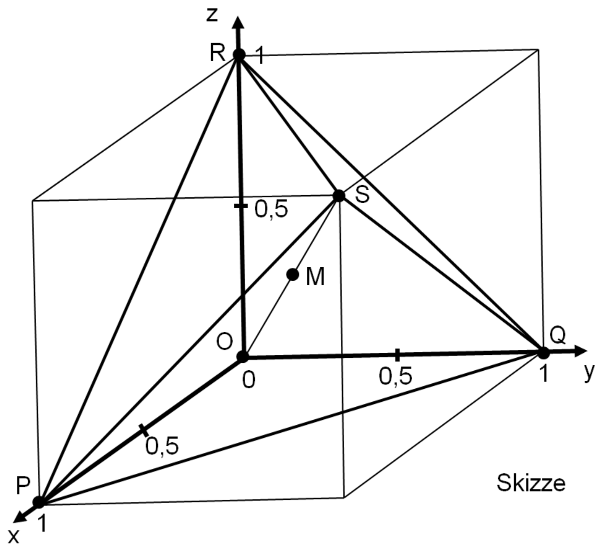
d) Von den Graphen G_f und $G_{f'}$ werden zwei Teilflächen vollständig eingeschlossen. Kennzeichnen Sie diese Flächen in der Abbildung. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes der eingeschlossenen Gesamtfläche.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	5	3	5	6	19

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	lokale Extrempunkte: $f'(x) = 3x^2 - 3; f''(x) = 6x$ $0 = 3x^2 - 3; \quad 0 = x^2 - 1$ $x_{E_1} = -1; \quad x_{E_2} = 1$ $f''(-1) = -6 < 0; \quad f''(1) = 6 > 0$ $H(-1 \mid 4); \quad T(1 \mid 0)$	1 4
b)	Monotonieverhalten: $-\infty < x < -1;$ streng monoton wachsend ; $f'(-2) = 9 > 0$ $-1 < x < 1;$ streng monoton fallend ; $f'(0) = -3 < 0$ $1 < x < \infty;$ streng monoton wachsend ; $f'(2) = 9 > 0$ (Begründung auch unter Verwendung der lokalen Extrempunkte möglich)	3
c)	Schnittpunkte der Graphen G_f und $G_{f'}$: $f(x) = f'(x)$ $0 = x^3 - 3x^2 - 3x + 5$ mit $x_1 = 1$ $(x^3 - 3x^2 - 3x + 5):(x - 1) = x^2 - 2x - 5$ $x^2 - 2x - 5 = 0$ $x_2 = 1 - \sqrt{6} \approx -1{,}45$ $x_3 = 1 + \sqrt{6} \approx 3{,}45$ $P_1(-1{,}45 \mid 3{,}30);\ P_2(1 \mid 0);\ P_3(3{,}45 \mid 32{,}71)$	5
d)	Flächeninhalt der Gesamtfläche: eingeschlossene Flächen kennzeichnen $h(x) = f(x) - f'(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 5$ $A = A_1 + A_2$ $A_1 = \left\| \int_{-1{,}45}^{1} h(x)dx \right\| = \left\| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x \right]_{-1{,}45}^{1} \right\| \approx 9$ $A_2 = \left\| \int_{1}^{3{,}45} h(x)dx \right\| \approx 9$ $A = 18\,\text{FE}$ Die Gesamtfläche hat einen Flächeninhalt von 18 FE.	1 5
	Summe	19

3. Aufgabe: Wahlpflichtthema Analytische Geometrie

Bei Untersuchungen von Molekülstrukturen können diese als Punktmodelle beschrieben werden.
Ein solches Modell, z. B. eines Methanmoleküls, kann als Tetraeder betrachtet werden. Um leichter Berechnungen durchführen zu können, ist es zweckmäßig, dieses in einen Würfel der Kantenlänge eine Längeneinheit (1 LE) einzubeschreiben. Dabei stellen die Eckpunkte des Würfels P, Q, R und S die Lage der Atome dar. Der Punkt M liegt im Mittelpunkt der Raumdiagonalen $\overline{OS}$ und symbolisiert die Lage des Zentralatoms im Methanmolekül (siehe Skizze).



a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte P, Q, R, S und M für dieses Modell.

b) Bestimmen Sie den Abstand eines Atoms vom Mittelpunkt M .

c) Berechnen Sie die Größe des Winkels $\angle PMQ$.

d) Gegeben sind die Geraden g und h. Dabei verläuft die Gerade g durch den Punkt R und die Gerade h durch den Punkt P. Auf beiden Geraden soll jeweils eine Raumdiagonale liegen. Stellen Sie Gleichungen für beide Geraden auf. Zeigen Sie rechnerisch, dass sich beide Geraden im Punkt M schneiden.

e) Weisen Sie nach, dass die Maßzahl des Volumens des Tetraeders PQRS genau $\frac{1}{3}$ beträgt.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	3	2	3	8	4	20

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	$P(1 \mid 0 \mid 0)$; $Q(0 \mid 1 \mid 0)$; $R(0 \mid 0 \mid 1)$; $S(1 \mid 1 \mid 1)$ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OS}$; $M(0{,}5 \mid 0{,}5 \mid 0{,}5)$	3
b)	$\lvert\overrightarrow{MS}\rvert = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{0{,}75} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\text{LE} \approx 0{,}87\ \text{LE}$	2
c)	Berechnung des Winkels $\angle PMQ = \alpha$: $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}}{\sqrt{0{,}75} \cdot \sqrt{0{,}75}} = \dfrac{-0{,}25}{0{,}75} = -\dfrac{1}{3}$; $\alpha = 109{,}47°$	3
d)	g: $R(0\|0\|1)$; $R'(1\|1\|0)$ h: $P(1\|0\|0)$; $P'(0\|1\|1)$	2
	g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	2
	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	2
	$r = \frac{1}{2}$; $s = \frac{1}{2}$; $M(0{,}5 \mid 0{,}5 \mid 0{,}5)$	2

e)	$V=\frac{a^3}{12}\cdot\sqrt{2}$; $\left\|\overrightarrow{PS}\right\|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$ $V=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{12}\cdot\sqrt{2}=\frac{1}{3}$	4
	Summe	20

3. Aufgabe: Wahlpflichtthema Zahlenfolgen

Bild: eigenes Foto

Im Schaufenster eines Schmuckgeschäftes in Potsdam liegen Perlenketten nach der Länge aufsteigend sortiert. Von den elf unterschiedlichen Ketten ist die kürzeste 22 cm lang. Die Längenänderung in cm ist von Kette zu Kette gleich. Die sechste Kette hat eine Länge von 25,75 cm.

Betrachten Sie die Längen der Ketten als eine Zahlenfolge (a_n).

a) Wie groß ist die Differenz benachbarter Glieder? Welche spezielle Art der Folge entsteht unter dieser Bedingung?
Geben Sie für (a_n) eine explizite Bildungsvorschrift an. Bestimmen Sie die ersten sechs Glieder dieser Zahlenfolge.

b) Ein Kunde möchte eine Kette aus der Schaufensterdekoration in einer Länge von 290 mm kaufen. Untersuchen Sie rechnerisch, ob das möglich ist.

In einem Schmuckgeschäft in Cottbus wurden elf Perlenketten ebenfalls nach der Länge aufsteigend angeordnet. Die kürzeste Kette ist 22 cm lang. Die Länge jeder weiteren Kette ergibt sich hier als die 1,13-fache Länge der Vorhergehenden. Es entsteht für die Längen der Perlenketten eine Zahlenfolge (b_n).

c) Um welche spezielle Zahlenfolge handelt es sich bei der Folge (b_n)?
Bestimmen Sie eine explizite Bildungsvorschrift dieser Zahlenfolge. Berechnen Sie die ersten sechs Glieder dieser Zahlenfolge.

d) Um wie viele Ketten müsste die Kollektion von Cottbus erweitert werden, so dass die letzte Kette mindestens 1 m lang ist?

e) Zeichnen Sie die ersten 6 Glieder beider Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) in ein gemeinsames Koordinatensystem.

f) Die Herstellungskosten aller Ketten in beiden Geschäften betragen 3,50 € pro 1 cm Kettenlänge. Ermitteln Sie durch Rechnung, in welchem Geschäft für die Herstellung der ersten drei Perlenketten weniger Kosten entstanden sind und geben Sie diese an.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	4	3	3	3	4	3	20

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Differenz der benachbarten Glieder:
$25{,}75 - 22 = 3{,}75$
$3{,}75 : 5 = 0{,}75$

Die Differenz beträgt 0,75 cm.
Es handelt sich um eine arithmetische Zahlenfolge.

explizite Bildungsvorschrift:
$a_n = 22 + (n-1)\cdot 0{,}75$
$a_n = 0{,}75n + 21{,}25$

die ersten sechs Glieder dieser Zahlenfolge:
$(a_n) = \{22;\ 22{,}75;\ 23{,}5;\ 24{,}25;\ 25;\ 25{,}75;\ ...\}$</td><td>3

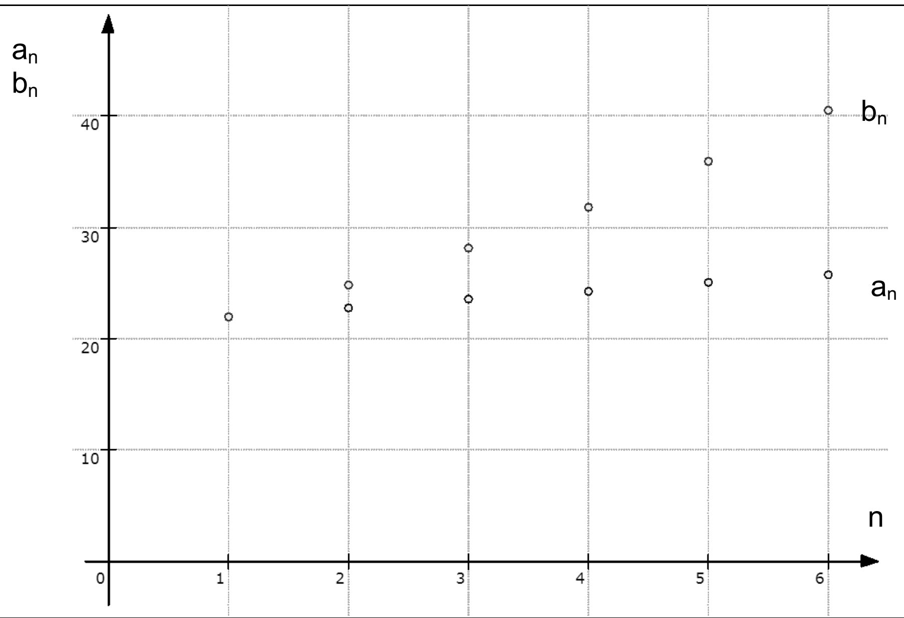
1</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Ist eine Länge von 290 mm möglich?
$290\,\text{mm} = 29\,\text{cm}$
$29 = 22 + (n-1)\cdot 0{,}75$
$n \approx 10{,}33$; nicht ganzzahlig
Die Kette ist in der Länge nicht erhältlich.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Es handelt sich um eine geometrische Zahlenfolge.

explizite Bildungsvorschrift:
$b_n = 22 \cdot 1{,}13^{n-1}$

die ersten sechs Glieder dieser Zahlenfolge:
$(b_n) = \{22;\ 24{,}86;\ 28{,}09;\ 31{,}74;\ 35{,}87;\ 40{,}53;\ ...\}$</td><td>1

1

1</td></tr>
</table>

d)	Erweitern der Kettenanzahl auf mindestens 1 m: $1\,\text{m} = 100\,\text{cm}$ $100 \le 22 \cdot 1{,}13^{n-1}$ $\frac{\log 4{,}55}{\log 1{,}13} \le n-1$ $13{,}4 \le n$ $n = 14$ $14 - 11 = 3$ Die Kollektion müsste um 3 Ketten erweitert werden.	3
e)		4
f)	$1\,\text{cm}$ entspricht 3,50 € Kosten im Schmuckgeschäft in Potsdam: $22 + 22{,}75 + 23{,}5 = 68{,}25$ $68{,}25 \cdot 3{,}50 \approx 238{,}88$ Kosten im Schmuckgeschäft in Cottbus: $22 + 24{,}86 + 28{,}09 = 74{,}95$ $74{,}95 \cdot 3{,}50 \approx 262{,}33$ Die Kosten in Potsdam sind 238,88 € und in Cottbus 262,33 €. Im Schmuckgeschäft Potsdam sind weniger Kosten bei den ersten drei Perlenketten entstanden.	3
	Summe	20