LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Klassenarbeit unter Prüfungsbedingungen im Schuljahr 2009/2010

Mathematik (A)

26. März 2010

Material für die Hand der Lehrkraft

Zugelassene Hilfsmittel:	- Taschenrechner (nicht programmierbar und nicht grafikfähig) - Nachschlagwerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache - Tafelwerk - Millimeterpapier

Bewertungsschlüssel

Note	1	2	3	4	5	6
Errreichte Punktzahl	58 - 53	52 - 47	46 - 39	38 - 29	28 - 17	16 - 0

Aufgabe 1: Zahlenfolgen 18 Punkte

Gegeben ist eine beschränkte Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{12n+4}{5n+6}$; $n \in N^*$.

a) Stellen Sie die ersten 6 Folgenglieder in einem kartesischen Koordinatensystem auf Millimeterpapier dar. Berechnen Sie a_{51} und a_{101}.

b) Berechnen Sie, wie viele Glieder von (a_n) kleiner als 2,39 sind.

c) Untersuchen Sie die Zahlenfolge (a_n) auf Monotonie und führen Sie den rechnerischen Nachweis.

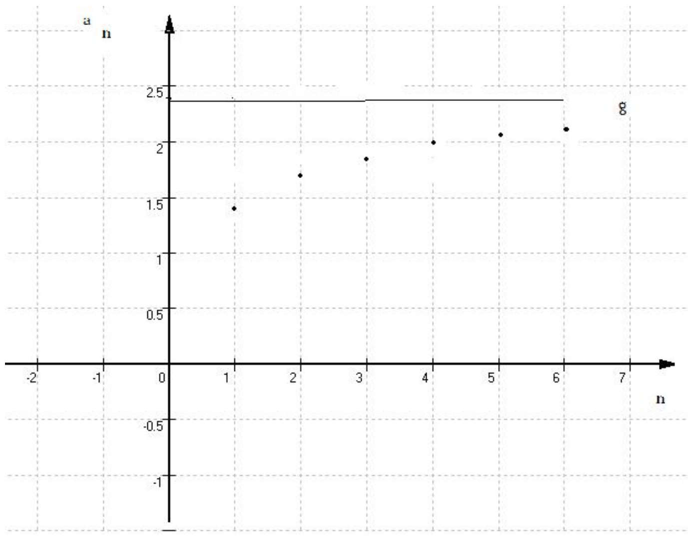
d) Ermitteln Sie den Grenzwert g von (a_n) und tragen Sie diesen in das Koordinatensystem von Teilaufgabe a) ein.

e) Bestimmen Sie für $\varepsilon = \frac{1}{25}$ die natürliche Zahl n(ε), von der ab alle weiteren Folgenglieder in der ε-Umgebung des Grenzwertes g liegen.

Erwartungsbild Aufgabe 1

a) Glieder der Zahlenfolge (zur Grafik)

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1,45	1,75	1,9	2	2,06	2,11



$a_{51} = \frac{616}{261} \approx 2{,}36$ $\qquad a_{101} = \frac{1216}{511} \approx 2{,}38$ 5 P

b) $\frac{12n+4}{5n+6} < 2{,}39$ $\qquad n < 206{,}8$ $\qquad$ 206 Glieder sind kleiner als 2,39 3 P

c) Monotonieverhalten

Vermutung: Die Zahlenfolge (a_n) ist streng monoton wachsend.

$$\text{zu zeigen: } a_n < a_{n+1}$$

$$\frac{12n+4}{5n+6} < \frac{12n+16}{5n+11}$$

$$(12n+4)(5n+11) < (12n+16)(5n+6)$$

$$60n^2 + 152n + 44 < 60n^2 + 152n + 96$$

$$44 < 96 \qquad \text{w. A.} \rightarrow (a_n) \text{ ist streng monoton wachsend}$$

4 P

d) Grenzwert g ermitteln

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(12+\frac{4}{n})}{n(5+\frac{6}{n})} = 2{,}4 = g\,;$$ 2 P

Einzeichnen in Grafik a) 1 P

e) Nummer des Folgegliedes für ε-Umgebung von g ermitteln

$$|a_n - g| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{12n+4}{5n+6} - \frac{12}{5}\right| < \frac{1}{25}$$

$$\left|\frac{-52}{25n+30}\right| < \frac{1}{25}$$

$$50{,}8 < n$$

Ergebnis: Ab n = 51 liegen alle weiteren Folgeglieder in der ε-Umgebung

von g= 2,4 mit $\varepsilon = \frac{1}{25}$. 3 P

Aufgabe 2: Differentialrechnung 21 Punkte

Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+4x \quad (x \in R)$ mit dem Graphen G_f.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von G_f.

b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und weisen Sie die Art der Extrema nach.

c) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Wendepunkt von G_f gleichzeitig ein Achsenschnittpunkt ist.

d) Zeichnen Sie G_f in ein kartesisches Koordinatensystem im Intervall $-0,5 \leq x \leq 4,5$ ein.

e) Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes der Fläche, die vom Graphen G_f und der x-Achse vollständig begrenzt wird.

f) Ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente t und zeichnen Sie t in das Koordinatensystem von Teilaufgabe d) ein.

Die Tangente t begrenzt mit den Koordinatenachsen eine Fläche vollständig. Diese wird von G_f in zwei Teilflächen zerlegt. In welchem Verhältnis stehen die Maßzahlen der Flächeninhalte dieser Teilflächen zueinander?

Erwartungsbild Aufgabe 2

a) Nullstellen: $x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 4$ 3 P

b) $f'(x) = 1,5x^2 - 6x + 4$; $f''(x) = 3x - 6$

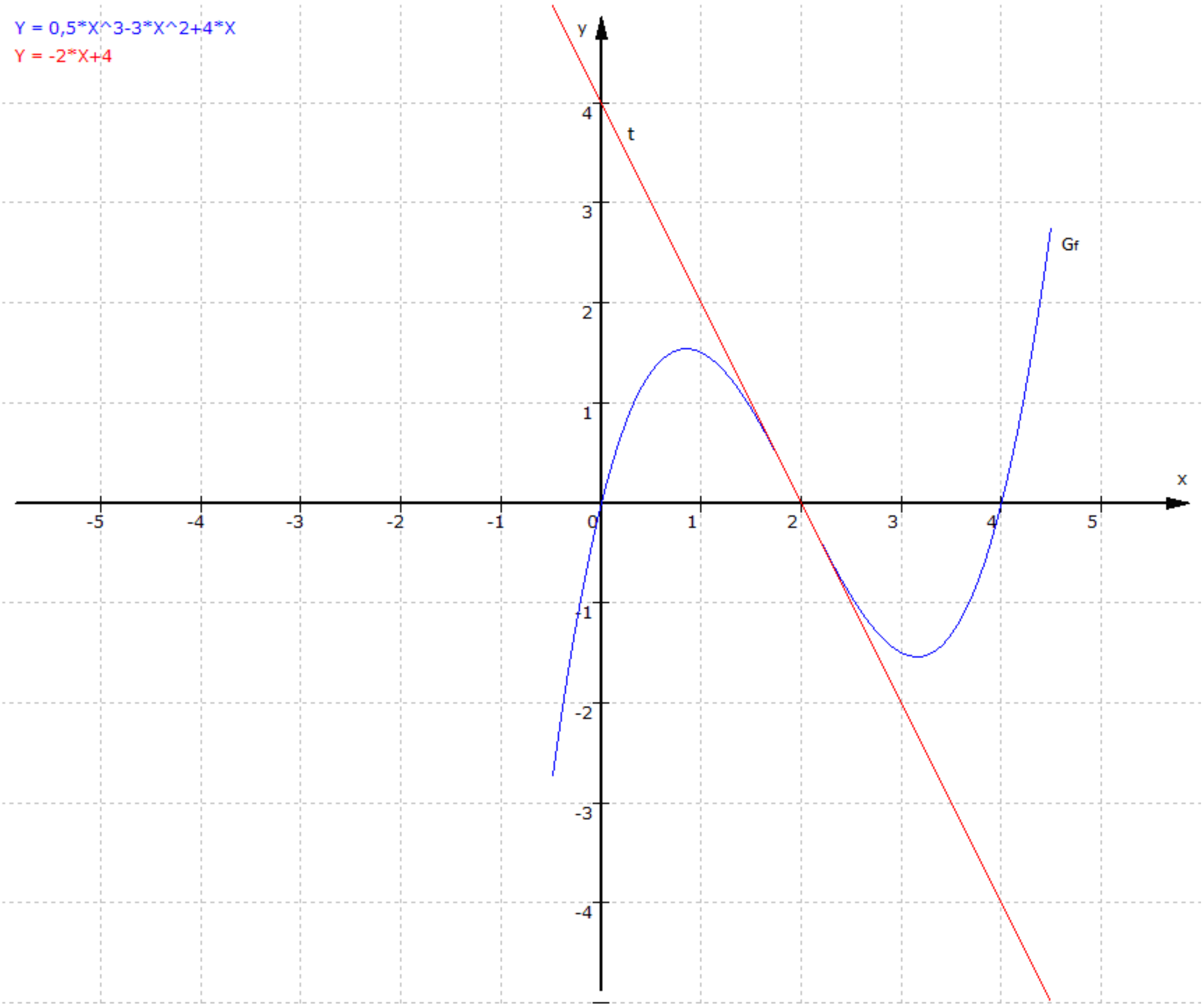
$x^2 - 4x + \frac{8}{3} = 0$; $x_{E1} = 0,85 \quad x_{E2} = 3,15$

$f''(0,85) = -3,45$ H (0,85|1,54)

$f''(3,15) = 3,45$ T (3,15|-1,54) 5 P

c) $3x - 6 = 0$; $x_W = 2$; $f'''(2) = 3 \rightarrow$ W (2|0) 3 P

d) Graphische Darstellung 2 P



e) Flächenberechnung:

$$A_1 = \int_0^2 (0{,}5x^3 - 3x^2 + 4x)dx = \left[\frac{x^4}{8} - x^3 + 2x^2\right]_0^2 = 2$$

$$A_2 = |\int_2^4 (0{,}5x^3 - 3x^2 + 4x)dx| = |\left[\frac{x^4}{8} - x^3 + 2x^2\right]_2^4| = |-2| = 2$$

$A_{gesamt} = A_1 + A_2 = 4$

Die Maßzahl des Flächeninhaltes der eingeschlossenen Fläche beträgt 4. 4 P

f) t : y = - 2x + 4 ; Darstellung von t 2 P

Fläche des Dreiecks: $A_D = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$

Untere Teilfläche: $A_u = A_1 = 2$
Obere Teilfläche: $A_o = A_D - A_u = 2$

Das Verhältnis der beiden Flächen zueinander beträgt 1 : 1. 2 P

Aufgabe 3: Integralrechnung 19 Punkte

Im Rahmen eines Schulprojektes soll der Außenbereich farblich neu gestaltet werden.

Die rechteckige Rückwand ist 5 Meter lang und 2,50 Meter hoch. Für das geplante Landschaftsbild ist zunächst eine Zweiteilung der Fläche in einen oberen blauen und einen unteren grünen Farbbereich vorgesehen.

Diese Einteilung erfolgt durch den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades, der durch die Punkte A (0|1), B (2|2), C (4|1,8) und D (5|2) verläuft.

a) Zeichnen Sie das Rechteck und die gegebenen Punkte in ein kartesisches Koordinatensystem auf Millimeterpapier ein, wobei die linke untere Ecke des Rechtecks im Koordinatenursprung liegt.

Skizzieren Sie aus den gegebenen Punkten einen möglichen Verlauf des Graphen G_f im Rechteck.

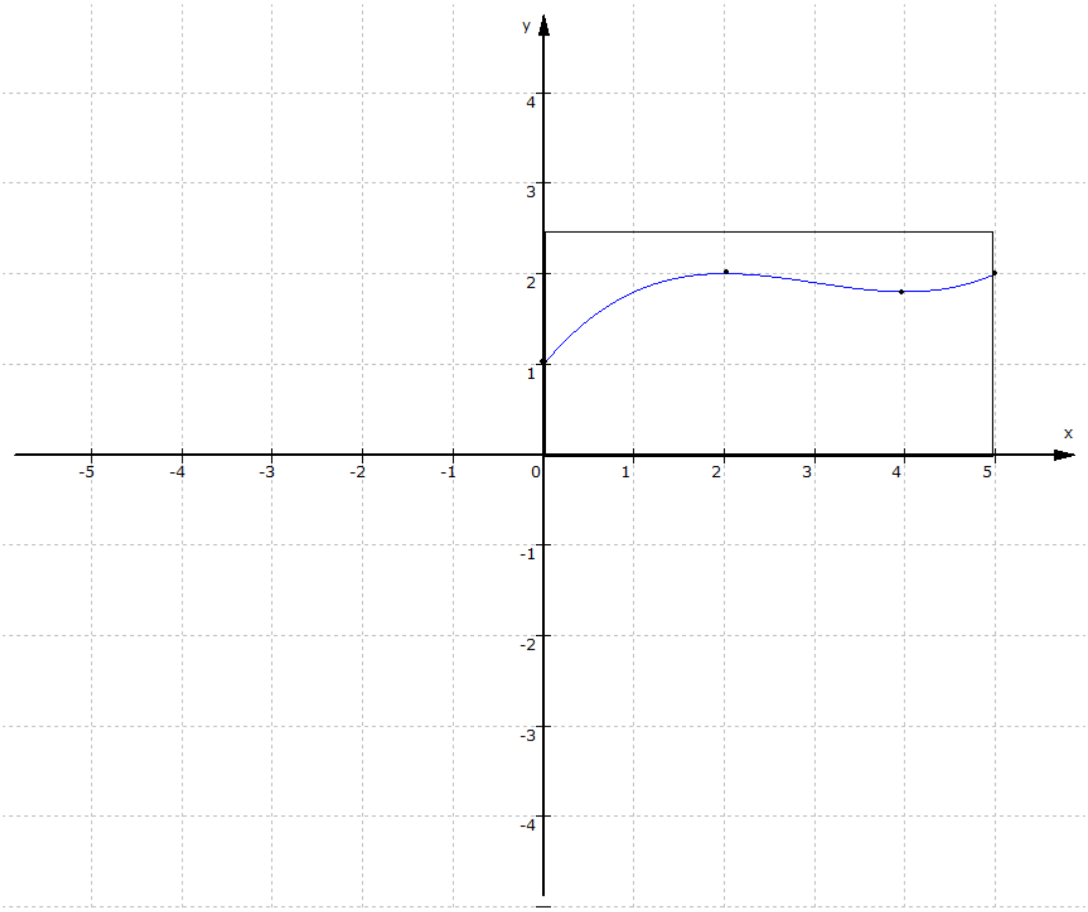
b) Berechnen Sie eine Funktionsgleichung für die Funktion f.

c) Weisen Sie nach, dass die Punkte B und C lokale Extrempunkte der Funktion f mit $f(x) = 0{,}05x^3 - 0{,}45x^2 + 1{,}2x + 1 \quad (x \in R)$ sind.

d) Die beiden Flächen sollen mit blauer bzw. grüner Farbe aus Spraydosen eingefärbt werden. Der Inhalt einer Dose reicht für 2,5 m².
Berechnen Sie den Bedarf an blauen und grünen Farbspraydosen.

Erwartungsbild Aufgabe 3

a) Graph G_f 3 P



b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(0) = 1$	I.	$d = 1$
$f(2) = 2$	II.	$8a + 4b + 2c + d = 2$
$f(4) = 1{,}8$	III.	$64a + 16b + 4c + d = 1{,}8$
$f(5) = 2$	IV.	$125a + 25b + 5c + d = 2$

$\Rightarrow a = \frac{1}{20} = 0{,}05$; $b = -\frac{9}{20} = -0{,}45$; $c = 1{,}2$; $d = 1$

$\Rightarrow f(x) = 0{,}05x^3 - 0{,}45x^2 + 1{,}2x + 1$ 6 P

c) $f'(x) = 0{,}15x^2 - 0{,}9x + 1{,}2$; $f''(x) = 0{,}3x - 0{,}9$

aus $f'(2) = 0$, $f''(2) = -0{,}3 < 0$ und $f(2) = 2 \rightarrow H(2\,|\,2)$,

aus $f'(4) = 0$, $f''(4) = 0{,}3 > 0$ und $f(4) = 1{,}8 \rightarrow T(4\,|\,1{,}8)$ 3 P

d) Flächenberechnung:

$$A_1 = \int_0^5 \left(\frac{1}{20}x^3 - \frac{9}{20}x^2 + 1{,}2x + 1\right)dx = \left[\frac{1}{80}x^4 - \frac{3}{20}x^3 + \frac{3}{5}x^2 + x\right]_0^5 = 9\frac{1}{16}$$ 3 P

Die grüne Fläche ist 9,06 m² groß. Man benötigt 4 Farbdosen.

$$A_{Rechteck} = 2{,}5\,m \cdot 5\,m = 12{,}5\ m^2$$

$A_2 = A_{Rechteck} - A_1$

$$A_2 = 12{,}5\,m^2 - 9{,}06\,m^2 = 3{,}44\,m^2$$

Die blaue Fläche ist 3,44 m² groß. Man benötigt 2 Farbdosen. 4 P