



LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

---

**Zentrale Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife  
im Schuljahr 2010/2011**

**Mathematik A**

**24. Mai 2011 – 09:00 Uhr**

# 1. Aufgabe

## Differential- und Integralrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion  $f$  vierten Grades in der allgemeinen Form  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  mit  $a, b, c, d, e, x \in \mathbb{R}$ ; ( $a \neq 0$ ).

- a) Zeigen Sie, dass die dritte Ableitung der Funktion durch den Funktionsterm  $f'''(x) = 24ax - 6b$  beschrieben werden kann.
- b) Berechnen Sie die Koeffizienten  $a, b, c, d$  und  $e$  für eine gesuchte Funktion  $f$ , die folgenden Bedingungen genügt:
1. Die Punkte  $A(0 | 2)$  und  $B(2 | 0)$  liegen auf dem Graphen von  $f$ .
  2. Die erste Ableitung der Funktion  $f$  an der Stelle  $x = -1$  ist gleich 0.
  3. Die zweite Ableitung der Funktion  $f$  an der Stelle  $x = 1$  ist gleich 0.
  4. Die dritte Ableitung der Funktion  $f$  an der Stelle  $x = 0,5$  ist gleich 6.

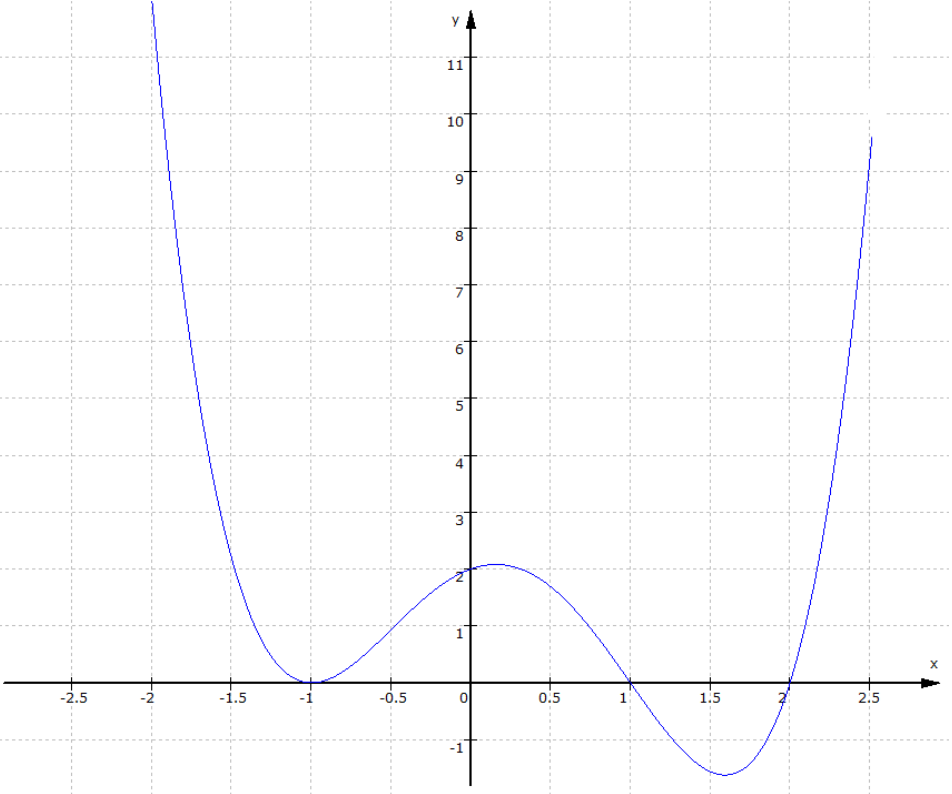
Geben Sie den entsprechenden Funktionsterm für  $f$  an.

(zur Kontrolle:  $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$ )

- c) Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von  $f$ .
- d) Zeigen Sie durch Rechnung, dass  $x_2 = -1$  und  $x_3 = 1$  zwei der insgesamt drei Nullstellen der Funktion  $f$  sind. Zeichnen Sie den Graphen von  $f$  im Intervall  $-2 \leq x \leq 2,5$  in ein kartesisches Koordinatensystem.
- e) Berechnen Sie die Maßzahlen der Flächeninhalte der Flächen, die vom Graphen der Funktion  $f$  und der  $x$ -Achse vollständig begrenzt werden. Geben Sie diese als Gesamtfläche in Flächeneinheiten (FE) an.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	1	7	9	3	5	25

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e; \quad f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c; \quad f'''(x) = 24ax + 6b$	1
b)	$A(0 2) \quad e = 2$ $B(2 0) \quad -2 = 16a + 8b + 4c + 2d$ $f'(-1) = 0 \quad 0 = -4a + 3b - 2c + d$ $f''(1) = 0 \quad 0 = 12a + 6b + 2c$ $f'''(0,5) = 6 \quad 6 = 12a + 6b$  $-2 = 24a + 2b + 8c$ $0 = -48a - 24b - 8c$ <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> $-2 = -24a - 22b$ $12 = 24a + 12b$ <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> $10 = -10b$ $b = -1 \quad a = 1 \quad c = -3 \quad d = 1$ $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$	1  2      4
c)	Extrempunkte: $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 1; \quad f''(x) = 12x^2 - 6x - 6; \quad f'''(x) = 24x - 6$ $f'(x) = 0$ aus b) $x_{E1} = -1; \quad 4x^2 - 7x + 1 = 0; \quad x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{1}{4} = 0$ $x_{E2} \approx 1,59; \quad x_{E3} \approx 0,16$ $f''(-1) = 12 > 0 \text{ TP}; \quad f''(1,59) \approx 14,8 > 0 \text{ TP}; \quad f''(0,16) \approx -6,65 < 0 \text{ HP}$ $T_1(-1 0); \quad T_2(1,59 -1,62); \quad H(0,16 2,08)$ Wendepunkte: $12x^2 - 6x - 6 = 0; \quad x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0; \quad x_{W1} = 1; \quad x_{W2} = -\frac{1}{2}$ $f'''(1) = 18 \neq 0; \quad f'''(-\frac{1}{2}) = -18 \neq 0$ $W_1(1 0); \quad W_2(-\frac{1}{2} \frac{15}{16}) \approx (-0,5 0,94)$	1     5     3

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
d)	<p>Nachweis der Nullstellen:  <math>f(-1) = 1 + 1 - 3 - 1 + 2 = 0</math>; <math>f(1) = 1 - 1 - 3 + 1 + 2 = 0</math></p> <p>Skizze:</p> 	1
e)	$A_1 = \int_{-1}^1 (x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2) dx = \left[ \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{4} x^4 - x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_{-1}^1$ $= \frac{29}{20} - \left( -\frac{19}{20} \right) = 2,4$ $A_2 = \int_1^2 (x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2) dx = \left[ \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{4} x^4 - x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_1^2$ $ A_2  = \left  \frac{2}{5} - \frac{29}{20} \right  = \frac{21}{20} = 1,05$ $A_{\text{ges}} = 3,45$ <p>Die Gesamtfläche beträgt 3,45 FE.</p>	3
	Summe	25

## 2. Aufgabe

### Zahlenfolgen

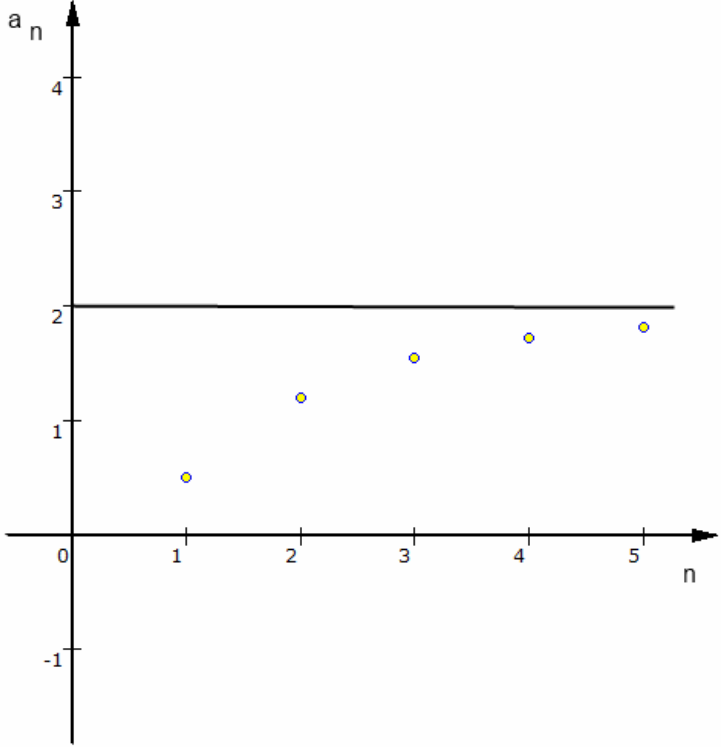
Gegeben ist eine Zahlenfolge  $(a_n)$  durch  $a_n = \frac{8n^2 - 1}{4n^2 + 10}$ ;  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Ermitteln Sie die ersten fünf Folgenglieder von  $(a_n)$  und stellen Sie diese in einem geeigneten Koordinatensystem graphisch dar.
- Weisen Sie das Monotonieverhalten der Folge  $(a_n)$  nach.
- Bestimmen Sie den Grenzwert  $g$  der Folge  $(a_n)$ . Zeichnen Sie  $g$  in das Koordinatensystem aus Aufgabe a) ein.
- Berechnen Sie, von welchem Folgenglied ab alle weiteren Glieder in der  $\varepsilon$ -Umgebung des Grenzwertes  $g$  liegen, wenn  $\varepsilon = \frac{1}{100}$  ist.
- Berechnen Sie, welches Glied der Folge  $(a_n)$  den Wert  $\frac{193}{98}$  hat.
- Gegeben ist eine weitere konvergente Zahlenfolge  $(b_n)$  mit

$$b_n = \frac{6n^2 + c}{2n^2 + d}; \quad n \in \mathbb{N}^* \text{ und } c, d \in \mathbb{R}.$$

Wählen Sie zwei Zahlen für  $c$  und  $d$  derart aus, dass die dadurch entstehende Folge streng monoton fallend wird.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	4	4	3	4	3	2	20

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	<p>Folglieder:  <math>a_1 = \frac{1}{2} = 0,5; a_2 = \frac{31}{26} \approx 1,19; a_3 = \frac{71}{46} \approx 1,54; a_4 = \frac{127}{74} \approx 1,72; a_5 = \frac{199}{110} \approx 1,81</math></p> <p>Graphische Darstellung</p> 	2
b)	<p>Vermutung: streng monoton steigend: <math>b_n &lt; b_{n+1}</math></p> $\frac{8n^2 - 1}{4n^2 + 10} < \frac{8(n+1)^2 - 1}{4(n+1)^2 + 10};$ $\frac{8n^2 - 1}{4n^2 + 10} < \frac{8n^2 + 16n + 7}{4n^2 + 8n + 14}$ $(8n^2 - 1)(4n^2 + 8n + 14) < (8n^2 + 16n + 7)(4n^2 + 10)$ $-84 < 168n$ $-\frac{1}{2} < n$ <p>Die Vermutung wurde bestätigt.</p>	4
c)	<p>Grenzwert g</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - 1}{4n^2 + 10} = \frac{8}{4} = 2$ <p>Gerade <math>g = 2</math> zeichnen</p>	2 1

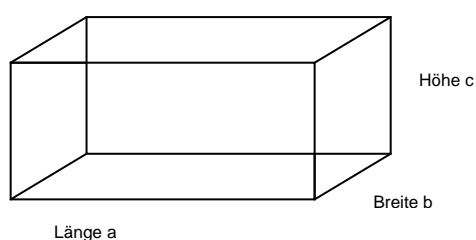
Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
d)	$\left  \frac{8n^2 - 1}{4n^2 + 10} - 2 \right  < \frac{1}{100}$ $\left  \frac{-21}{4n^2 + 10} \right  < \frac{1}{100}$ $\frac{4n^2 + 10}{21} > 100$ $4n^2 > 2090; \quad n^2 > 522,5; \quad n > 22,86 \text{ (negativer Wert entfällt)}$ <p>Antwort: Ab <math>n = 23</math> liegen alle weiteren Glieder in der <math>\varepsilon</math>-Umgebung des Grenzwertes für <math>\varepsilon = \frac{1}{100}</math>.</p>	4
e)	$\frac{8n^2 - 1}{4n^2 + 10} = \frac{193}{98}$ $784n^2 - 98 = 772n^2 + 1930$ $n^2 = 169$ $n_1 = 13 \text{ (negativer Wert entfällt)}$	3
f)	Schüler wählen Zahlen für c und d derart, dass gilt: $c > d$ .	2
	Summe	20

### 3. Aufgabe

#### Extremwertaufgabe

Im Fachunterricht wurden zur Prüfungsvorbereitung Lernhilfen als Karteikärtchen der Größe 10 cm x 7 cm angefertigt. Diese Sammlung soll in mehreren Schachteln den nachfolgenden Schülerjahrgängen zur Verfügung gestellt und eventuell ergänzt werden.

3 Schülergruppen fertigen dafür nach oben offene quaderförmige Schachteln aus Pappe an.



Skizze nicht maßstäblich

- a) Die Schüler der Gruppe 1 schlagen folgende Maße für eine Schachtel vor:

Länge: 11 cm, Breite: 11 cm, Höhe: 5,5 cm.

Berechnen Sie den Materialverbrauch für 15 dieser Schachteln, wenn für Verschnitt und Klebefalze pro Schachtel ein Mehrverbrauch von 8 % einkalkuliert werden muss. Wie viele Schachteln ließen sich theoretisch aus 1 m<sup>2</sup> Pappe herstellen?

- b) Um die Karten auch nebeneinander anordnen zu können überlegen die Schüler der Gruppe 2 nun, die Schachtel jeweils doppelt so lang und nur halb so breit wie von Gruppe 1 vorgeschlagen zu bauen. Die Höhe bleibt unverändert.

Um wie viel Prozent verändert sich der Materialverbrauch bei gleichem Mehrbedarf von 8 % für Verschnitt und Falze? In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Schachtelvarianten der Gruppen 1 und 2 zueinander?

- c) Die Mathematiker der Gruppe 3 legen für die Schachtel ein Volumen von 640 cm<sup>3</sup> fest. Sie wollen die Schachteln mit geringstem Materialverbrauch herstellen.

Berechnen Sie die Maße einer Schachtel, wenn deren Länge a doppelt so groß wie die Höhe c sein soll. Falze und Verschnitt bleiben hierbei unberücksichtigt.

$$\text{(zur Kontrolle: } A_0(c) = \frac{1280}{c} + 4c^2 \text{)}$$

Aufgabenteil	a)	b)	c)	Summe
Punkte	5	7	8	20



Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	<p>geg.: <math>a = b = 11 \text{ cm}</math>  <math>c = 5,5 \text{ cm}</math></p> <p>ges.: <math>A_0</math></p> <p>Lös.:</p> $A_0 = ab + 2bc + 2ac$ $A_0 = 121 + 121 + 121 = 363$ $8 \% \hat{=} 29,04$ $A_0 + 29,04 = 392,04$ <p>Der Verbrauch für 15 Schachteln beträgt <math>5880,6 \text{ cm}^2</math>.</p> $1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$ $10000 : 392,04 = 25,51$ <p>Theoretisch reicht das Material für 25 Schachteln.</p>	<p>3</p> <p>1</p> <p>1</p>
b)	<p>geg.: <math>a = 22 \text{ cm}</math>  <math>b = c = 5,5 \text{ cm}</math></p> <p>ges.: <math>A_0, V</math></p> <p>Lös.:</p> $A_0 = ab + 2bc + 2ac$ $A_0 = 121 + 242 + 60,5 = 423,5$ $8 \% \hat{=} 33,88$ $A_0 + 33,88 = 457,38$ <p>Der Materialmehrverbrauch beträgt 16,67 %.</p> <p>Volumen:</p> $V_1 = 11 \cdot 11 \cdot 5,5 \quad V_2 = 22 \cdot 5,5 \cdot 5,5$ $V_1 = 665,5 \quad V_2 = 665,5$ <p>Man erhält ein Verhältnis der beiden Volumina von <math>V_1 : V_2 = 1:1</math>.</p>	<p>1</p> <p>3</p> <p>2</p> <p>1</p>

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
c)	<p>Minimaler Oberflächeninhalt</p> $A_o = 2ac + 2bc + ab$ <p>NB: <math>a = 2c</math>; <math>640 = a \cdot b \cdot c = 2bc^2</math>; <math>b = \frac{320}{c^2}</math></p> $A_o(c) = 4c^2 + \frac{1280}{c}$ $A_o'(c) = 8c - \frac{1280}{c^2}; \quad A_o''(c) = 8 + \frac{2560}{c^3}$ $8c - \frac{1280}{c^2} = 0; \quad 8c^3 = 1280; \quad c^3 = 160; \quad c = 5,43$ $A_o''(5,43) = 8 + \frac{2560}{5,43^3} = 23,99 > 0; \quad A_o \text{ wird minimal}$ <p>für <math>a = 2c = 10,86</math>; <math>b = 10,85</math></p> <p>Die Länge beträgt 10,86 cm, die Breite 10,85 cm und die Höhe 5,43 cm. (Ohne Rundung wären die Seiten a und b gleich lang).</p>	<p>2</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>2</p> <p>2</p>
	Summe	20