LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Klassenarbeit unter Prüfungsbedingungen im Schuljahr 2009/2010

Mathematik (B)

26. März 2010

Material für die Hand der Lehrkraft

Zugelassene Hilfsmittel:

- Taschenrechner (nicht programmierbar und nicht grafikfähig)
- Nachschlagwerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
- Tafelwerk
- Millimeterpapier

Bewertungsschlüssel

Note	1	2	3	4	5	6
Errreichte Punktzahl	58 - 53	52 - 47	46 - 39	38 - 29	28 - 17	16 - 0

Aufgabe 1: Zahlenfolgen 19 Punkte

Eine Zahlenfolge (b_n) ist gegeben durch den Folgenanfang $b_n = \{-1; 1; 3; 5; ...\}$.
Eine weitere Zahlenfolge (c_n) ist durch die Folgenglieder $c_5 = 22$ und $c_7 = 30$ eindeutig bestimmt und ist arithmetisch.
Für die Zahlenfolge (a_n) gilt $a_n = \frac{b_n}{c_n}$.

a) Zeigen Sie, dass die Folge (b_n) eine arithmetische Folge ist und stellen Sie jeweils eine explizite Bildungsvorschrift für die Folgen (b_n) und (c_n) auf.

b) Berechnen Sie die ersten fünf Folgenglieder der Zahlenfolge (a_n) und stellen Sie diese in einem kartesischen Koordinatensystem auf Millimeterpapier grafisch dar.

c) Für welches n gilt: $a_n = \frac{141}{306}$?

d) Weisen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von (a_n) nach.

e) Ermitteln Sie den Grenzwert g der Zahlenfolge (a_n). Wie viele Folgenglieder von (a_n) liegen außerhalb der ε - Umgebung von g mit $\varepsilon = \frac{1}{100}$?

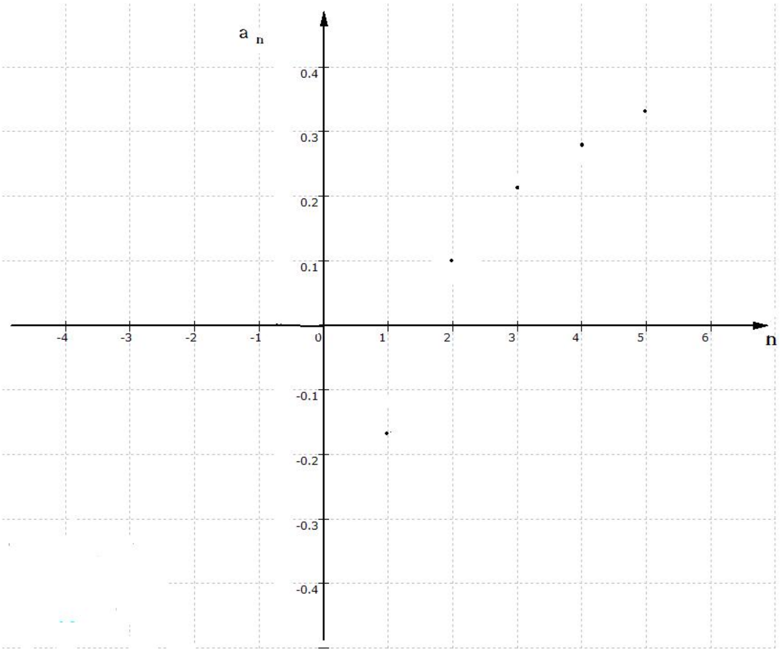
Erwartungsbild Aufgabe 1

a) Nachweis: $b_2 - b_1 = b_3 - b_2 = b_4 - b_3 = d = 2$ 2 P

$\Rightarrow$ b_n ist eine arithmetische Zahlenfolge $b_n = 2n - 3$ 2 P

$(c_n): d = \frac{c_7 - c_5}{2} = 4; c_5 = c_1 + 4d \rightarrow c_1 = 6 \rightarrow c_n = 4n + 2$ 2 P

b) $a_n = \{-0{,}17;\ 0{,}1;\ 0{,}21;\ 0{,}28;\ 0{,}32\}$ 2 P



c) $\frac{141}{306} = \frac{2n-3}{4n+2}$ $\Rightarrow$ 564n + 282 = 612n –918

n = 25 2 P

d) Behauptung: a_n ist streng monoton steigend 1 P

Beweis: zu zeigen: $a_n < a_{n+1}$

$$\frac{2n-3}{4n+2} < \frac{2n-1}{4n+6}$$

$$8n^2 + 12n - 12n - 18 < 8n^2 + 4n - 4n - 2$$ 3 P

- 18 < - 2 wahre Aussage

e) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n(2 - \frac{3}{n})}{n(4 + \frac{2}{n})} = 0{,}5 = g$$ 2 P

$$\left|\frac{2n-3}{4n+2} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad |-4| < \frac{4}{100}n + \frac{2}{100}$$

99,5 < n

99 Folgenglieder liegen außerhalb der ε- Umgebung von g. 3 P

Aufgabe 2: Differentialrechnung 21 Punkte

Gegeben ist eine Funktion f durch $y = f(x) = x^4 - \frac{25}{4}x^2 + 9 \quad (x \in R)$ mit dem Graphen G_f.

a) Untersuchen Sie den Graph G_f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und geben Sie deren Koordinaten an.

b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und der Wendepunkte des Graphen der Funktion f und weisen Sie die Art der Extrema nach.

c) Zeichnen Sie den Graphen G_f in ein geeignetes Koordinatensystem im Intervall $-2{,}5 \le x \le 2{,}5$ ein.

d) Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente t an G_f im Punkt P(1|f (1)). (Kontrolle: t: 17x + 2y -24,5 = 0)

e) Die Gerade g mit g (x) = 8,5x + 12,25 und die Tangente t bilden gemeinsam mit der x-Achse ein Dreieck D. Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte dieses Dreiecks und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes von D.

Erwartungsbild Aufgabe 2

a) Nullstellen: $x^2 = z \quad z^2 - 6{,}25z + 9 = 0 \quad z_1 = 4; z_2 = 2{,}25$

Achsenschnittpunkte: $P_{x_{1/2}}(\pm 2 \mid 0); P_{x_{3/4}}(\pm 1{,}5 \mid 0); P_y(0 \mid 9)$ 4 P

b) Ableitungen:
$f'(x) = 4x^3 - 12{,}5x$; $f''(x) = 12x^2 - 12{,}5$; $f'''(x) = 24x$ 1 P

Extrema: $4x^3 - 12{,}5x = 0$ $x_{E_1} = 0; x_{E_{2/3}} = \pm 1{,}77$ 2 P

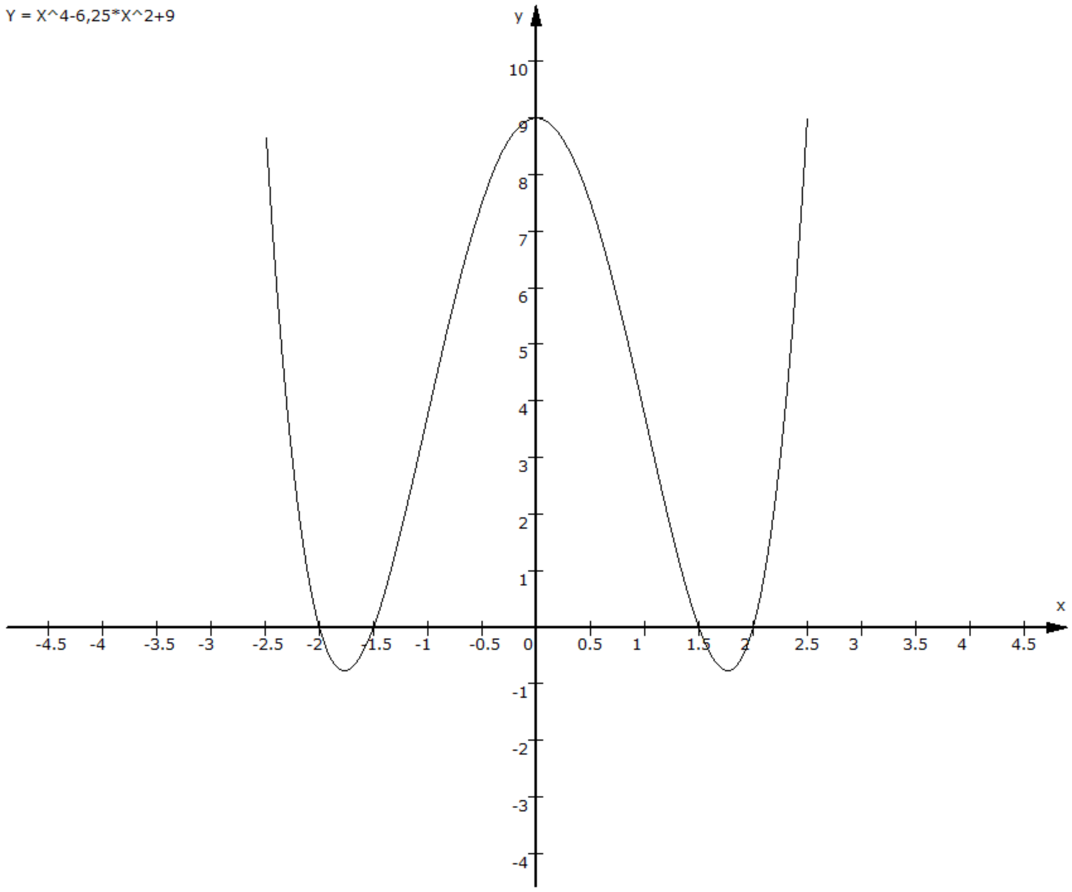
$f''(0) = -12{,}5 \rightarrow$ Hochpunkt; $f''(\pm 1{,}77) = 25{,}09 \rightarrow$ Tiefpunkte 2 P

H (0|9); T_1 (1,77|- 0,77); T_2 (- 1,77|- 0,77) 1 P

Wendepunkte

$12x^2 = 12{,}5 \quad x^2 = 1{,}04 \quad x_{W_{1/2}} \ \pm 1{,}02$
$f'''(\pm 1{,}02) = \pm 24{,}48 \neq 0 \rightarrow$ WP W_1 (1,02|3,58); W_2 (-1,02|3,58) 3 P

c) Graph: $y = f(x) = x^4 - \frac{25}{4}x^2 + 9 \quad (x \in R)$ 2 P



d) Tangente t : P (1|3,75) f´(1) = - 8,5; m = - 8,5
t : y = - 8,5x + 12,25 3 P

e) Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks: $E_{x_1}(1{,}44\,|\,0); E_{x_2}(-1{,}44\,|\,0); E_y(0\,|\,12{,}25)$
2 P

$A_D = \frac{1}{2} \cdot 2{,}88 \cdot 12{,}25 = 17{,}64$ 1 P

Die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks beträgt 17,64.

Aufgabe 3: Integralrechnung 18 Punkte

Eine 40 m lange Halle mit rechteckiger Grundfläche soll zu einem tropischen Schmetterlingshaus umgebaut werden. Der Giebel wird von einer Parabel zweiten Grades nach oben begrenzt.

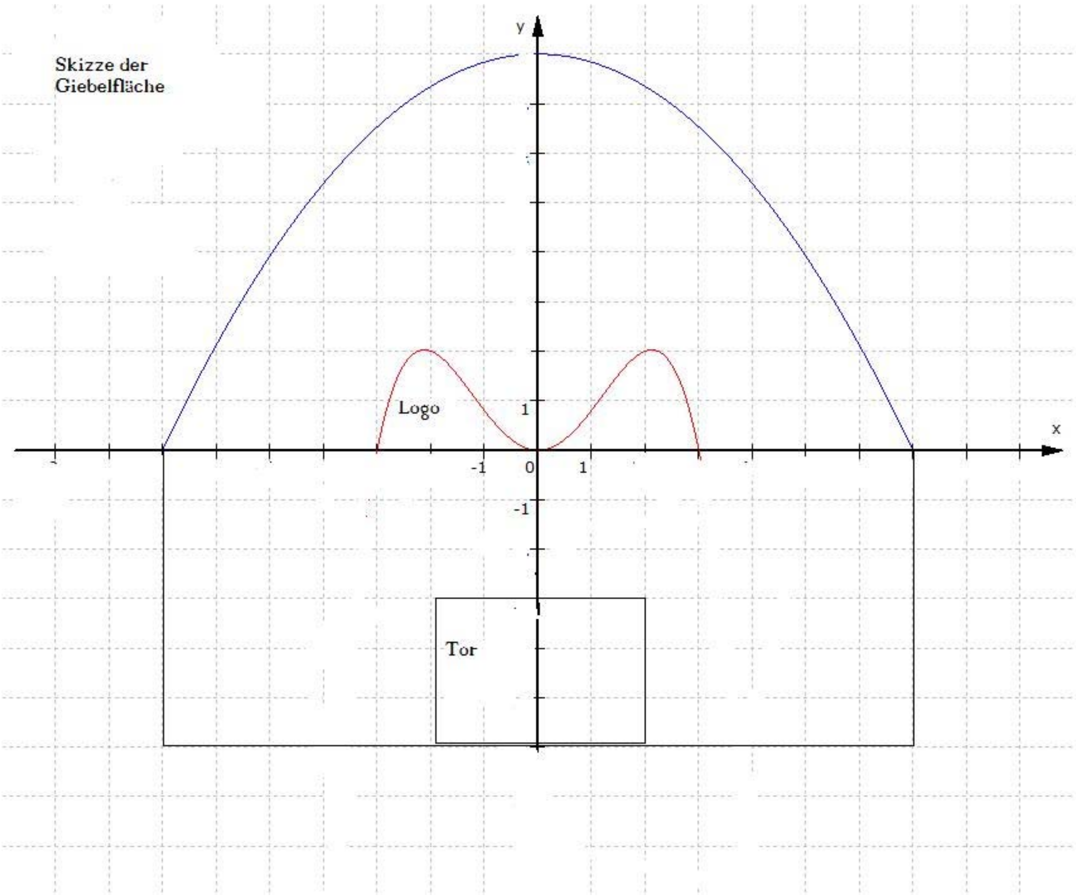
a) Weisen Sie nach, dass die Maßzahl des Flächeninhaltes der Giebelfläche $158{,}67$ beträgt.

b) In der gesamten Halle wird eine Luftfeuchtigkeit von 85 % benötigt. Wie viele Ultraschall–Bestäuber, die als automatische Berieselungsanlage eingesetzt werden sollen, muss der Betreiber installieren lassen, wenn ein Gerät für die Befeuchtung von 250 m³ Luft ausgelegt ist?

c) Über dem Tor im Giebel befindet sich eine Fläche mit dem Logo der Betreiberfirma. Diese Fläche wird begrenzt vom Graphen der Funktion f mit $f(x) = -0{,}1\,(x^4 - 9x^2)$ $(x \in R)$ und der x-Achse.

Berechnen Sie die Giebelfläche, die ohne Tor und Logofläche mit einem neuen Anstrich versehen werden soll.

Wie viele Liter Farbe müssen bestellt werden und wie teuer wird dieser Anstrich, wenn 10 l Farbe für 25 m² ausreichen und 30 € kosten?



Erwartungsbild Aufgabe 3

a) Gleichung der Parabel

$g(x) = ax^2 + c \qquad g(0) = 8 \quad g(7) = 0 \quad \rightarrow \qquad c = 8 \text{ und } a = -\frac{8}{49}$

$g(x) = -\frac{8}{49}x^2 + 8$ 3 P

Fläche unter der Parabel

$A_1 = 2 \cdot \int_0^7 g(x)dx = 2\left[-\frac{8}{147}x^3 + 8x\right]_0^7 = 2 \cdot 37\frac{1}{3} = 74{,}67$ 3 P

Maßzahl

$A = A_{Rechteck} + A_1 = 6 \cdot 14 + 74{,}67 = 158{,}67$

Die Maßzahl des Flächeninhaltes der gesamten Giebelfläche beträgt 158,67. 2 P

b) Gesamtvolumen

$V = 158{,}67 \cdot 40 = 6346{,}67$ 1 P

Gesamtzahl der Geräte

$\frac{V}{250} = 25{,}38$ Man benötigt 26 Geräte. 1 P

c) Maßzahl des Flächeninhalts des Tors:

$A_{Tür} = 4 \cdot 3 = 12$ 2 P

Nullstellen von f: $x_1 = 0; x_{2/3} = \pm 3$ 1 P

Fläche des Logos

$A_{Logo} = 2\int_0^3 f(x)dx = -\frac{2}{10}\left[\frac{x^5}{5} - 3x^3\right]_0^3 = -\frac{2}{10} \cdot \left(-\frac{162}{5}\right) = \frac{162}{25} = 6{,}48$ 2 P

zu streichende Fläche

$A = 158{,}67 - 12 - 6{,}48 \approx 140{,}19$

Es müssen etwa 140,19 m² am vorderen Giebel gestrichen werden. 1 P

Preis für den Anstrich

10 l für 25 m² kosten 30 €

0,4 l für 1 m² kosten 1,20 € $\rightarrow 140{,}19 \cdot 1{,}20 = 168{,}23 \;;\; 0{,}4 \cdot 140{,}19 = 56{,}076$

Der Anstrich kostet 168,23 € und man braucht dazu 56,08 l.

(Zu bestellen sind 60 l zu 180 €) 2 P