LAND BRANDENBURG

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport

Zentrale Prüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife im Schuljahr 2010/2011

Mathematik

14. Juni 2011 – 09:00 Uhr

1. Aufgabe

Differential- und Integralrechnung

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4;\ x \in R$.

Ihr Graph sei G_f.

a) Zeigen Sie, dass der Graph G_f die x-Achse in genau einem Punkt schneidet und in einem weiteren Punkt die x- Achse berührt. Geben Sie die Koordinaten der beiden Punkte an.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten der Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeigen Sie, dass die Extrempunkte und der Wendepunkt von f auf einer Geraden g liegen.

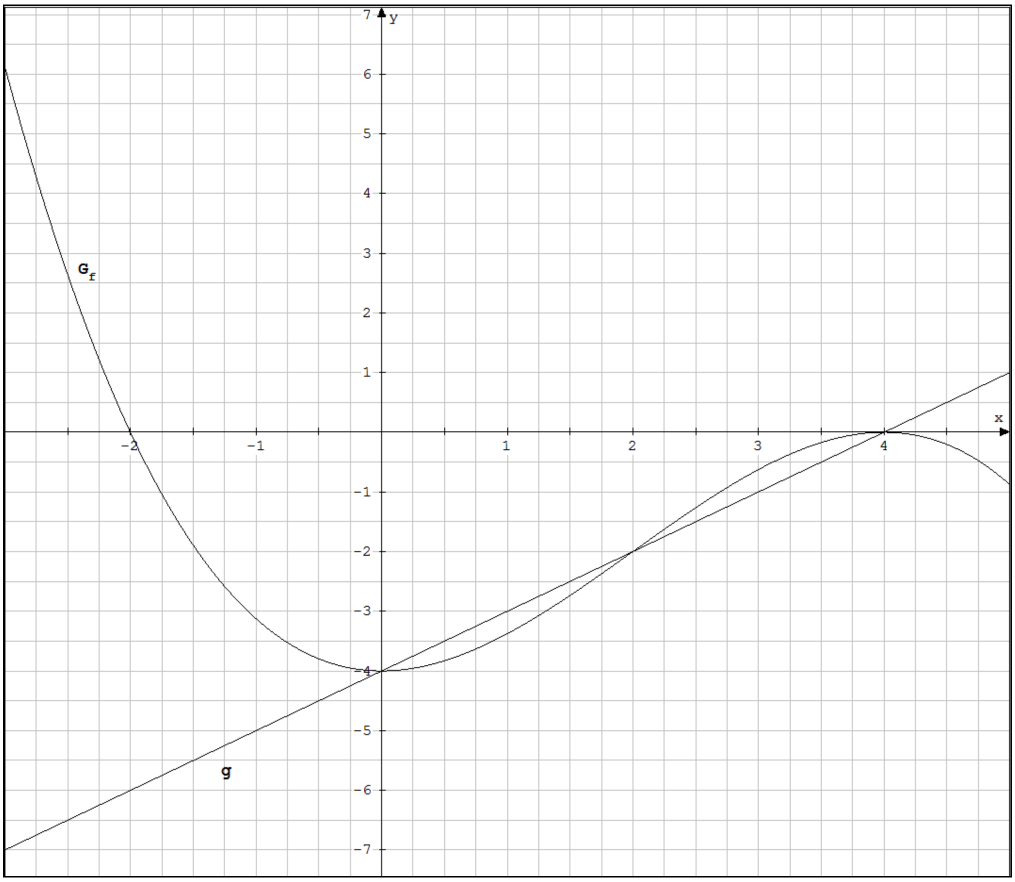
c) Zeichnen Sie den Graphen G_f und die Gerade g in ein kartesisches Koordinatensystem im Intervall mit $-3 \le x \le 5$.

d) Der Graph G_f und die Gerade g mit der Gleichung $y = x - 4$ schließen zwei Flächenstücke vollständig ein. Berechnen Sie das Verhältnis der Maßzahlen der Flächeninhalte dieser beiden Flächen.

e) Eine weitere Gerade h verläuft parallel zur Geraden g und schneidet den Graphen G_f bei $x = -2$. Bestimmen Sie einen Funktionsterm für h.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	4	11	3	5	2	25

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	Nullstellen: $0 = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4$ $0 = -\frac{1}{8}(x-4)^2(x+2)$; $x_{1/2} = 4$ und $x_3 = -2$ Doppelte Nullstelle bei $x_{1/2} = 4$ berührt die x-Achse. (kann auch bei Aufgabe b) als Extrempunkt erkannt werden) $N_{1/2}(4\|0)$ Einfache Nullstelle bei $x_3 = -2$ schneidet die x-Achse. $N_3(-2\|0)$	4
b)	$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$ $f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ $f'''(x) = -\frac{3}{4}$ Extrempunkte: $0 = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$; $x_{E1} = 0$; $x_{E2} = 4$ $f''(0) = \frac{3}{2} > 0$ TP; $f''(4) = -\frac{3}{2} < 0$ HP T(0| -4) und H(4| 0)	5
	Wendepunkt: $0 = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$; $x_W = 2$ $f'''(2) = -\frac{3}{4} \neq 0$ W(2| -2)	3
	Gerade g: $g(x) = x - 4$ Bildung über zwei Punkte, Punktprobe mit dem 3. Punkt	3

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
c)		3
d)	$A_1 = \int_0^2 (g(x) - f(x))dx = \int_0^2 (\frac{x^3}{8} - \frac{3x^2}{4} + x)dx = \left[\frac{x^4}{32} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}$ $A_2 = \int_2^4 (f(x) - g(x))dx = \int_2^4 (-\frac{x^3}{8} + \frac{3x^2}{4} - x)dx = \left[-\frac{x^4}{32} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{2}\right] = \frac{1}{2}$ (oder über Beträge) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{1}$	3 1 1
e)	Gerade $h: h(x) = x + 2$ mit $m_g = m_h = 1$ und $N(-2 \mid 0)$	2
	Summe	25

2. Aufgabe

Zahlenfolgen

Das BAföG ist eine staatliche Geldleistung zur Studienfinanzierung, die zur Hälfte als Zuschuss und zur anderen Hälfte als zinsloses Darlehen gewährt wird. Die Höhe der Rückzahlungssumme kann um einen Rabatt von 37,5 % gekürzt werden, wenn die Rückzahlung in einem Betrag erfolgt.

Klaus hat während seiner Studienzeit von 4,5 Jahren insgesamt BAföG in Höhe von 30.240,00 € erhalten.

a) Berechnen Sie den durchschnittlichen monatlichen BAföG-Betrag, den Klaus erhielt.

b) Klaus möchte 2015 die Darlehensschuld aus der BAföG-Förderung in einem Betrag tilgen.

Wie hoch ist diese Schuld aus der BAföG-Förderung und welcher Rückzahlungsbetrag ist unter Berücksichtigung des Rabatts zu erstatten?

c) Klaus wird beim Ansparen des Rückzahlungsbetrages (9.450,00 €) von seinen Eltern und Großeltern unterstützt.

Wie hoch sind die Erträge aus den nachfolgenden Anlagen, über die Klaus jeweils zum Jahresende 2014 verfügen kann?

Anlage 1 — Die Großeltern haben einen Einmalbetrag von 2.000,00 € mit einem Zinssatz von $p = 2{,}75\ \%$ p.a. als Festgeld mit einer Laufzeit von 10 Jahren angelegt.

Anlage 2 — Die Eltern von Klaus zahlen über acht Jahre in einen Sparplan jeweils zum Jahresbeginn eine Rate von 400,00 € ein. Die Einlagen werden mit $p = 1{,}55\ \%$ p.a. vorschüssig verzinst.

Anlage 3 — Klaus hat zum 01.01.2008 einen Betrag von 800,00 € in einen Sparvertrag eíngezahlt. Ab dem 01.01.2010 zahlt er über 5 Jahre zum Jahresende eine Rate in Höhe von 400,00 € in den bestehenden Vertrag ein. Die Verzinsung erfolgt mit $p = 1{,}75\ \%$ p.a. nachschüssig.

Reichen die Erträge insgesamt aus, um den Rückzahlungsbetrag begleichen zu können? Ermitteln Sie gegebenenfalls den Differenzbetrag.

d) Berechnen Sie für die Anlage 1, welcher Zinssatz p anzusetzen ist, um bei gleichem Anfangskapital und gleicher Laufzeit einen Endbetrag von 3.050,00 € erzielen zu können.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	2	3	12	3	20

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	Durchschnittlicher monatlicher BAföG-Betrag $\overline{B} = \frac{30.240{,}00}{4{,}5 \cdot 12} = 560{,}00$ Klaus erhielt je Monat durchschnittlich 560,00 € BAföG.	2
b)	Schuld und tatsächlicher Rückzahlungsbetrag $S = \frac{30.240}{2} = 15.120{,}00$ $p = 100\,\% - 37{,}5\,\% = 62{,}5\,\%$ $R = 15.120{,}00 \cdot 0{,}625 = 9.450{,}00$ Die Schuld in Höhe von 15.120,00 € ist durch den Rabatt nur in Höhe von 9.450,00 € zu tilgen.	3
c)	Erträge der Anlagen 1 - 3 Anlage 1 $K_{10} = K_0 \cdot q^{10}$ mit $q = 1{,}0275$ $K_{10} = 2.000{,}00 \cdot 1{,}0275^{10} = 2.623{,}30$ Ertrag 2.623,30 €	3
	Anlage 2 $K_8 = \frac{400{,}00 \cdot 1{,}0155 \cdot (1{,}0155^8 - 1)}{0{,}0155} = 3.431{,}46$ Ertrag 3.431,46 €	3
	Anlage 3 $K_7 = 800{,}00 \cdot 1{,}0175^7 + \frac{400{,}00 \cdot (1{,}0175^5 - 1)}{0{,}0175} = 2.974{,}53$ Ertrag 2.974,53 €	4
	Die Summe der Erträge aus den Anlagen beträgt 9.029,29 €. Zur Begleichung des Rückzahlungsbetrages fehlen noch 420,71 €.	2
d)	Zinssatz p ermitteln $3.050{,}00 = 2.000{,}00 \cdot q^{10}$ $\frac{3.050{,}00}{2.000{,}00} = q^{10}$ $q \approx 1{,}043$ (negativer Wert entfällt) $q = 1 + \frac{p}{100\,\%}$; $p = (q-1) \cdot 100\,\%$ $p = 4{,}3\,\%$ Die Anlage der Großeltern hätte mit einem Zinssatz von $p = 4{,}3\,\%$ p.a. verzinst werden müssen.	3
	Summe	20

3. Aufgabe

Differentialrechnung

Vom Graphen G_f der Funktion f ist bekannt, dass er durch den Koordinatenursprung verläuft und mit $T(1|-14)$ einen Tiefpunkt besitzt. Weiterhin liegen die Punkte $P(-1|2)$ und $Q(2|32)$ auf dem Graphen. f ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades.

Die Ableitungsfunktion der Funktion f ist f' mit dem Graphen $G_{f'}$.

a) Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung für f.

(zur Kontrolle: $f(x) = 2x^4 + 8x^3 - 8x^2 - 16x$)

b) Die Graphen der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f' schneiden sich in mehreren Punkten. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Ableitungsfunktion $G_{f'}$ und geben Sie eine Funktionsgleichung für die zugehörige Wendetangente an.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	Summe
Punkte	8	6	6	20

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f(0) = 0$ I $e = 0$
$f(1) = -14$ II $a + b + c + d + e = -14$
$f'(1) = 0$ III $4a + 3b + 2c + d = 0$
$f(-1) = 2$ IV $a - b + c - d + e = 2$
$f(2) = 32$ V $16a + 8b + 4c + 2d + e = 32$

Lösen das lineare Gleichungssystem durch ein geeignetes Verfahren
Ergebnis: $f(x) = 2x^4 + 8x^3 - 8x^2 - 16x$</td><td>1

3

4</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$f'(x) = 8x^3 + 24x^2 - 16x - 16$
$f(x) = f'(x)$
$2x^4 + 8x^3 - 8x^2 - 16x = 8x^3 + 24x^2 - 16x - 16$
$2x^4 - 32x^2 + 16 = 0$
$x^4 - 16x^2 + 8 = 0$
$z^2 - 16z + 8 = 0$
$z_1 \approx 15{,}48;$ $x_1 \approx 3{,}93$; $x_2 \approx -3{,}93$
$z_2 \approx 0{,}52;$ $x_3 \approx 0{,}72$; $x_4 \approx -0{,}72$
$S_1(3{,}93 \mid 777{,}39);$ $S_2(-3{,}93 \mid -68{,}03);$
$S_3(0{,}72 \mid -12{,}09);$ $S_4(-0{,}72 \mid 4{,}98)$</td><td>3

2

1</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Koordinaten des Wendepunktes der Ableitungsfunktion:
$f''(x) = 24x^2 + 48x - 16$
$f'''(x) = 48x + 48$
$0 = 48x + 48;$ $x = -1$
$f^{(4)}(x) = 48 \neq 0$
$W(-1 \mid 16)$
Wendetangente:
$t(x) = mx + n$; $m = f''(-1) = -40$
$16 = -40 \cdot (-1) + n;$ $n = -24$
$t(x) = -40x - 24$</td><td>3

3</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>20</td></tr>
</table>