



**Zentrale schriftliche Abiturprüfung**

**2016**

**Mathematik**

**Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau**

**Aufgabenvorschlag**

**Teil 2**

**Hilfsmittel:**

Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist

Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen

**Aufgabenstellung 2**

**Thema/Inhalt:**

Analysis

**Hinweis:**

Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

**Aufgabenstellung 3**

**Thema/Inhalt:**

Analytische Geometrie und Stochastik

**Hinweis:**

Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

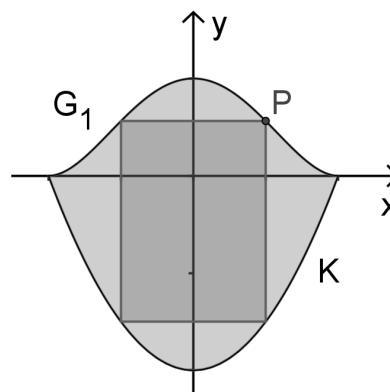
**Aufgabe 2.1: Stadtwappen**

Gegeben sind die Funktionenschar  $f_a$  mit  $f_a(x) = x^4 - 2ax^2 + a^2$ ;  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$  und die Funktion  $g$  mit  $g(x) = 2x^2 - 2$ . Die Graphen der Schar  $f_a$  sind  $G_a$  und der Graph der Funktion  $g$  ist  $K$ .

a) Weisen Sie nach, dass alle Graphen  $G_a$  achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse verlaufen. Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von  $G_a$  mit den beiden Koordinatenachsen.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte von  $G_a$  in Abhängigkeit von  $a$ . Für jeden Parameterwert  $a$  mit  $a > 0$  sind die drei lokalen Extrempunkte Eckpunkte eines Dreiecks. Wenn der Parameterwert  $a$  verdoppelt wird, vervielfacht sich der Flächeninhalt des ursprünglichen Dreiecks  $A_\Delta$ . Das neue Dreieck hat den Flächeninhalt  $A_{\text{neu}} = v \cdot A_\Delta$ . Ermitteln Sie den Faktor  $v$ .

c) Die Graphen  $G_1$  und  $K$  schließen im Intervall  $[-1; 1]$  eine Fläche ein, die als Schablone für das Wappen einer Stadt genutzt werden soll. Berechnen Sie den zugehörigen Flächeninhalt.



d) Der Punkt  $P$  liegt im I. Quadranten auf  $G_1$  (siehe Abbildung).  $P$  ist Eckpunkt eines Rechtecks, dessen Seiten achsenparallel verlaufen und dessen weitere Eckpunkte auf den Begrenzungslinien des Wappens liegen. Innerhalb dieses Rechtecks soll das Wappentier abgebildet werden.

Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks mit der Gleichung  $A(x) = 2x^5 - 8x^3 + 6x$  berechnet werden kann und ermitteln Sie den maximalen Flächeninhalt des Rechtecks. Auf den Nachweis des Maximums wird verzichtet.

e) Die untere Begrenzung des Stadtwappens soll statt durch die quadratische Parabel  $K$  mithilfe einer anderen quadratischen Parabel modelliert werden. Dabei sollen die Symmetrie des Wappens sowie die Schnittpunkte  $S_1(-1|0)$  und  $S_2(1|0)$  mit  $G_1$  zwar erhalten bleiben, sich aber die Fläche des Wappens um 2 FE vergrößern. Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der neuen Parabel.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	9	12	5	9	5	40

**Aufgabe 2.2: Bremsschuh**

Gegeben ist die Funktionenschar  $f_a$  mit  $f_a(x) = -e^{x-a} + e^{2x}$ ;  $a \in \mathbb{R}$ .

Die Graphen der Schar  $f_a$  sind  $G_a$ .

- a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von  $G_a$  mit den beiden Koordinatenachsen in Abhängigkeit von  $a$ .  
Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von  $f_1$  für  $x \rightarrow +\infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  an.

- b) Jeder Graph  $G_a$  hat im Punkt  $E_a(-a - \ln 2 | f_a(-a - \ln 2))$  eine zur x-Achse parallele Tangente. Zur Ermittlung des x-Wertes dieses Punktes hat ein Schüler den folgenden Lösungsweg korrekt angegeben:

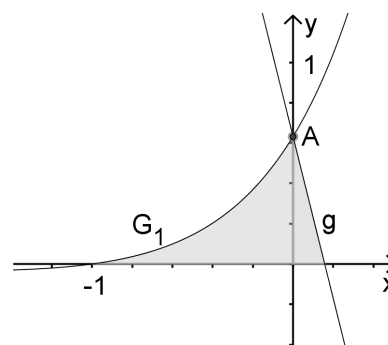
- (1)  $f'_a(x) = -e^{x-a} + 2e^{2x}$
- (2)  $0 = -e^{x-a} + 2e^{2x} \Leftrightarrow e^{x-a} = 2e^{2x}$
- (3)  $e^{-x-a} = 2$
- (4)  $x = -a - \ln 2$

Geben Sie drei Regeln an, die beim Ableiten des Funktionsterms von  $f_a$  genutzt worden sind und begründen Sie die Umformung von Gleichung (2) zu Gleichung (3).  
Zeigen Sie, dass für  $a = 0$  der Punkt  $E_0$  ein lokaler Extrempunkt von  $G_0$  ist.  
Bestimmen Sie dessen Koordinaten sowie die Art des Extremums.

- c) Der Graph  $G_1$  und die Gerade  $g$  mit der Gleichung

$y = -4x + 1 - \frac{1}{e}$  begrenzen gemeinsam mit der x-Achse eine Fläche, die dem Querschnitt eines Bremsschuhs entspricht, der das Wegrollen von Fahrzeugen verhindert (1 LE = 25 cm).

Die „Tiefe“ des Bremsschuhs beträgt 20 cm.  
Zeigen Sie, dass sich  $G_1$  und  $g$  auf der y-Achse schneiden.  
Berechnen Sie das Volumen eines solchen Bremsschuhs.



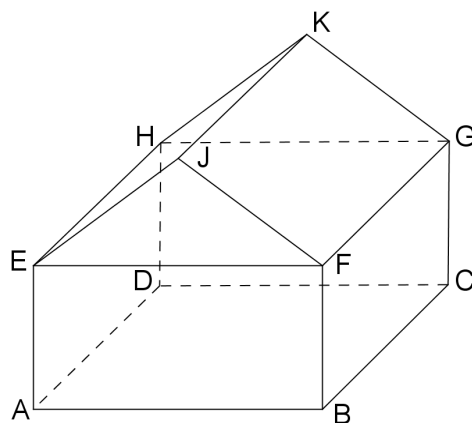
- d) Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den  $G_1$  und  $g$  im Punkt  $A(0 | 1 - \frac{1}{e})$  einschließen.

- e) Der Produzent der Bremsschuhe möchte auf der Querschnittsfläche des Bremsschuhs sein rechteckiges Firmenlogo mit den Seitenlängen 5 cm und 15 cm so einstanzen lassen, dass die längere der beiden Seiten parallel zur x-Achse verläuft.  
Untersuchen Sie, ob das möglich ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	11	13	5	5	40

**Aufgabe 3.1: Haus**

Die Abbildung zeigt ein Haus.  
 Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass sich die rechteckige Grundfläche des Hauses achsenparallel in der  $x$ - $y$ -Ebene befindet. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte  $D(0|0|0)$ ,  $F(10|8|4)$ ,  $G(0|8|4)$  und  $J(10|4|7)$ . Es gilt: 1 LE = 1 m.



- a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte  $K$  und  $E$  an.  
 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene  $E^*$ , in der die Dachfläche  $FGKJ$  liegt, in Koordinatenform.  
 [Kontrollergebnis:  $E^* : 3y + 4z = 40$ ]  
 Berechnen Sie den Neigungswinkel der Dachfläche  $FGKJ$  gegenüber einer horizontalen Ebene.

- b) Paralleles Licht fällt in Richtung  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\sqrt{39} \\ y \\ -5 \end{pmatrix}$  auf das Hausdach.

Bestimmen Sie einen möglichen Wert für  $y$  so, dass der Winkel zwischen der Richtung der Lichtstrahlen und der Dachfläche  $FGKJ$   $30^\circ$  beträgt.

- c) Ein Drittel der Dachfläche  $FGKJ$  wird mit Solarzellen bestückt.  
 Ermitteln Sie die Größe dieser Fläche.  
 Die Solarzellen können sowohl in der Dachfläche montiert werden als auch in Ebenen  $F_a$ , die parallel zur Dachfläche liegen. Dabei darf der Abstand der Ebenen  $F_a$  zur Dachfläche maximal 20 cm betragen.  
 Entwickeln Sie unter Verwendung des Parameters  $a$  eine Gleichung für die Ebenen  $F_a$  und geben Sie ein Intervall für die Einschränkung des Parameters  $a$  an.
- d) Im Innern des Hauses ist auf dem Fußboden  $EFGH$  des Dachraumes im Punkt  $P(1|5|4)$  ein 4 m langer, senkrecht stehender Mast für eine Satellitenantenne montiert. Dieser Mast ragt durch das Dach ins Freie.  
 Ermitteln Sie die Länge des Teiles dieses Mastes, der sich außerhalb des Hauses befindet.  
 Berechnen Sie den Abstand der Mastspitze  $S$  zur Ebene  $E^*$ .

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	9	5	7	9	30

**Aufgabe 3.2: Sportfan**

Gemäß einer „Studie zur Gesundheit Erwachsener in Deutschland“ zeigt sich in Deutschland ein Trend zu mehr sportlicher Aktivität.

Ein Viertel der Erwachsenen treibt regelmäßig mindestens zwei Stunden Sport pro Woche (Sportfans), wobei der Anteil der Sportfans unter den Männern mit 29,3 % etwas höher ist als unter den Frauen.

Alle anderen Bundesbürger werden hier als „keine Sportfans“ bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

*A* : Nur der zweite und sechste von zehn zufällig ausgewählten Bundesbürgern sind Sportfans.

*B* : Unter 20 zufällig ausgewählten männlichen Bundesbürgern befinden sich genau drei Sportfans.

*C* : Unter zehn zufällig ausgewählten Bundesbürgern befindet sich höchstens ein Sportfan.

*D* : Von 100 zufällig ausgewählten Bundesbürgern gehören mindestens 70 und weniger als 79 Personen zu denjenigen, die keine Sportfans sind.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Bundesbürger, die mindestens befragt werden müssten, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,96 wenigstens einen zu entdecken, der Sportfan ist.

c) Unter allen Bundesbürgern liegt der Anteil der Männer bei 48,88 % (Zensus 2011). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Sportfan ein Mann ist.  
Bestimmen Sie den Anteil der Sportfans unter den Frauen.

d) In einem Sportstudio trainieren 25 Bundesbürger, von denen genau acht zur Gruppe der Sportfans gehören. Es werden zufällig sieben Personen „ohne Zurücklegen“ ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *E*, dass sich unter den sieben ausgewählten Personen genau drei Sportfans befinden.

e) In einem Kochkurs befindet sich unter den *n* Kursteilnehmern genau ein Sportfan. Es werden zehn der Kursteilnehmer zufällig nacheinander und „ohne Zurücklegen“ ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Sportfan unter den ausgewählten Kursteilnehmern befindet, soll mindestens 80 % betragen.  
Bestimmen Sie für diesen Fall die maximale Anzahl *n* der Kursteilnehmer.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	11	4	8	3	4	30

**Anlage**

**Anlage zur Aufgabe 3.2: Sportfan**

**Summierte Binomialverteilungen**

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“,  
 alle freien Plätze links unten enthalten 1,0000, rechts oben 0,0000.

Wird die Tabelle „von unten“ gelesen ( $p > 0,5$ ), ist der gesuchte Wert  $1 -$  (abgelesener Wert).

n	k \ p	0,02	0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	k	
100	0	1326	0059							99	
	1	4033	0371	0003						98	
	2	6767	1183	0019						97	
	3	8590	2578	0078						96	
	4	9492	4360	0237	0001					95	
	5	9845	6160	0576	0004					94	
	6	9959	7660	1172	0013	0001				93	
	7	9991	8720	2061	0038	0003				92	
	8	9998	9369	3209	0095	0009				91	
	9	9999	9718	4513	0231	0023				90	
	10		9885	5832	0427	0057	0001			89	
	11		9957	7030	0777	0126	0004			88	
	12		9985	8018	1297	0253	0010			87	
	13		9995	8761	2000	0469	0025	0001		86	
	14		9999	9274	2874	0804	0054	0002		85	
	15			9601	3877	1285	0111	0004		84	
	16			9794	4942	1923	0211	0010	0001	83	
	17			9900	5994	2712	0376	0022	0002	82	
	18				9954	6965	3621	0630	0045	0005	81
	19				9980	7803	4602	0995	0089	0011	80
	20				9992	8481	5595	1488	0165	0024	79
	21				9997	8998	6540	2114	0288	0048	78
	22				9999	9370	7389	2864	0479	0091	77
	23					9621	8109	3711	0755	0164	76
	24					9783	8686	4617	1136	0281	75
	25					9881	9125	5535	1631	0458	74
	26					9938	9442	6417	2244	0715	73
	27					9969	9658	7224	2964	1066	72
	28					9985	9800	7925	3768	1524	71
	29					9993	9888	8505	4623	2093	70
	30					9997	9939	8962	5491	2766	69
	31					9999	9969	9307	6331	3525	68
	32						9985	9554	7107	4344	67
	33						9993	9723	7793	5188	66
	34						9997	9836	8371	6019	65
	35						9999	9906	8839	6803	64
	36						9999	9948	9201	7511	63
	37							9973	9470	8123	62
	38							9986	9660	8630	61
	39							9993	9790	9034	60
	40							9997	9875	9341	59
	41							9999	9928	9566	58
	42							9999	9960	9724	57
	43								9979	9831	56
	44								9989	9900	55
	45								9995	9943	54
	46								9997	9969	53
	47								9999	9983	52
	48								9999	9991	51
	49									9996	50
	50									9998	49
	51									9999	48
52										47	
n	k	0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$		k \ p	