Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2011

Mathematik

Leistungskurs

Aufgabenvorschlag

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache Formelsammlung, die von der zuständigen Senatsverwaltung bzw. dem zuständigen Ministerium für die Verwendung im Abitur zugelassen und an der Schule eingeführt ist Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügen.
Gesamtbearbeitungszeit:	270 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 1.1 oder 1.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 1.1: Testfahrt

Eine Funktion f ist für $x \in IR$ definiert durch: $f(x) = -(4x+80) \cdot e^{-\frac{1}{20}x} + 80$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf relative Extrempunkte und deren Art.
Der Graph von f besitzt genau einen Wendepunkt. Ermitteln Sie seine Koordinaten.
Auf die Verwendung eines hinreichenden Kriteriums zur Bestimmung des Wendepunktes wird verzichtet.
Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte für $x \to +\infty$ an.

[Zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{1}{5} x \cdot e^{-\frac{1}{20}x}$]

b) Zeichnen Sie den Graphen von f für $-10 < x < 150$ einschließlich seiner waagerechten Asymptote in das vorgegebene Koordinatensystem 1 ein.

Ein Schienenfahrzeug fährt aus dem Stand an. Die Geschwindigkeit des Schienenfahrzeugs wird für $x \geq 0$ durch $f(x) = -(4x+80) \cdot e^{-\frac{1}{20}x} + 80$ beschrieben.

Dabei wird die Zeit x in Sekunden und die Geschwindigkeit $v = f(x)$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ gemessen.

c) Die erste Ableitung von $v = f(x)$ ist die Beschleunigung a des Fahrzeugs: $a = f'(x)$.
Geben Sie nur mithilfe des notwendigen Kriteriums den Zeitpunkt x_{max} an, für den die Beschleunigung maximal wird.
Berechnen Sie mindestens drei Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen von f' für $0 \leq x \leq 40$ in das Koordinatensystem 2 ein.

d) Bei einer anderen Testfahrt wird die Beschleunigung zum Zeitpunkt $x = 40$ so geändert, dass sie nunmehr linear abnimmt und sich der Graph der linearen Funktion g tangential an den Graphen von f' anschließt.
Bestimmen Sie den Funktionsterm $g(x)$ dieser linearen Funktion und berechnen Sie den Zeitpunkt x_0, zu dem die Beschleunigung $g(x)$ auf null abgenommen hat.
Ergänzen Sie Ihre graphische Darstellung der Beschleunigung um den linearen Anteil.
[Kontrollergebnis: $g(x) = -0{,}2e^{-2} \cdot x + 16e^{-2}$]

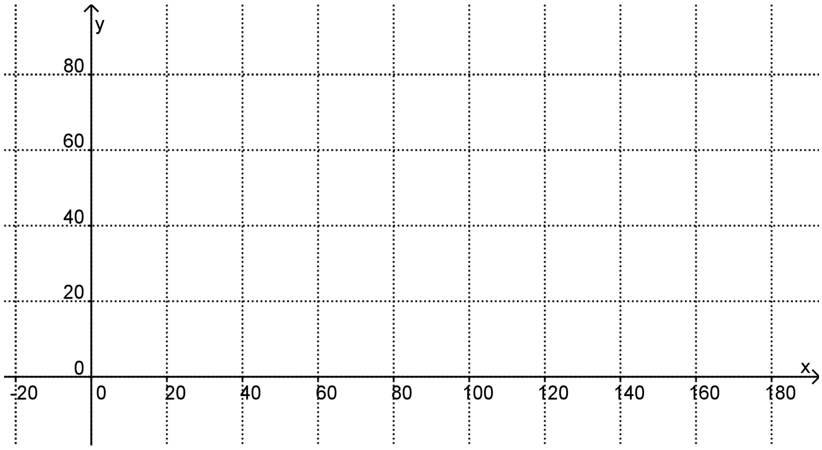
e) Der Inhalt der Fläche über dem Intervall $[\,0\,;80\,]$ zwischen der x-Achse und den bei $x = 40$ zusammen gefügten beiden Graphen von f' und g entspricht der zum Zeitpunkt $x_0 = 80$ erreichten Endgeschwindigkeit.
Berechnen Sie diesen Flächeninhalt und geben Sie die bei der zweiten Testfahrt nach 80 Sekunden erreichte Endgeschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	17	5	5	7	6	40

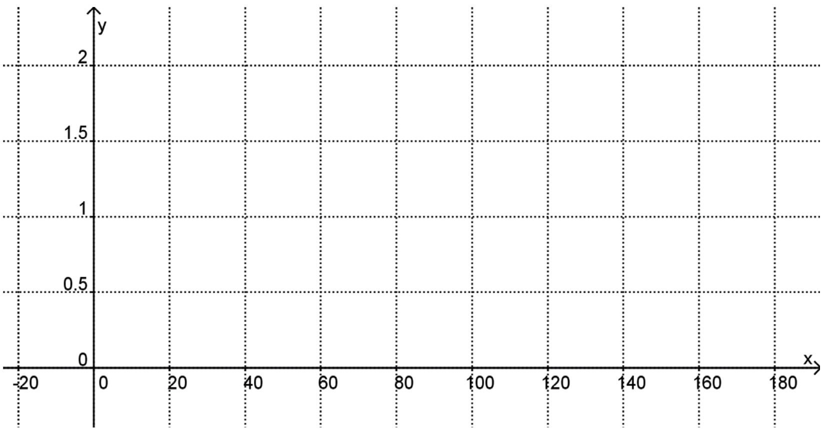
Anlage

Anlage zu Aufgabe 1.1: Testfahrt

Koordinatensystem 1



Koordinatensystem 2



Aufgabe 1.2: Kassenhäuschen

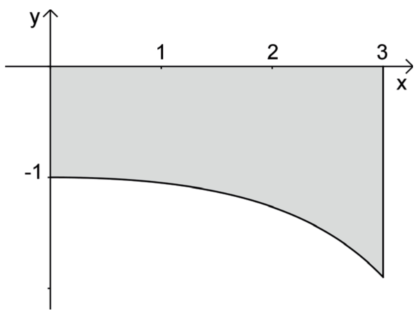
Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit der Gleichung $f_a(x) = ax + \dfrac{1}{ax-1}$; $a \in I\!R, a \neq 0$.

Die Graphen dieser Funktionen sind G_a. Die Graphen der Schar mit $a = 1;\ 2\ ;\ \frac{1}{5}$ sind in der Anlage vorgegeben.

a) Geben Sie den Definitionsbereich von f_a und die Gleichungen aller Asymptoten einschließlich der Polgeraden von G_a an.
Ordnen Sie den vorgegebenen Graphen die zugehörigen Parameterwerte a zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Zeigen Sie, dass $E(0 \mid f_a(0))$ lokaler Extrempunkt aller Graphen G_a ist und ermitteln Sie dessen Art. Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden: $f_a'(x) = a - \dfrac{a}{(ax-1)^2}$.
Neben E hat jeder Graph G_a einen weiteren lokalen Extrempunkt T. Bestimmen Sie dessen Koordinaten und weisen Sie nach, dass dieser stets ein lokaler Tiefpunkt des Graphen ist. [Kontrollergebnis: $T\left(\dfrac{2}{a} \mid 3\right)$]
Berechnen Sie diejenigen Werte a, für die die Punkte E und T einen Abstand von $\sqrt{17}$ LE haben.

c) Eine Ursprungsgerade g mit der Gleichung $y = b\,x$ mit $b > 0$ und die Tangente t im Tiefpunkt von G_2 schließen einen Winkel von $45°$ ein. Bestimmen Sie b für diesen Fall.
Die y-Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = x$ und die Tangente t begrenzen ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.



d) Der Graph $G_{\frac{1}{5}}$ schließt mit der Geraden mit der Gleichung $x = 3$ und den beiden Koordinatenachsen eine Fläche ein (siehe Darstellung). Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

e) Die in Aufgabe d) beschriebene Fläche wird um den Koordinatenursprung um 90° im Uhrzeigersinn gedreht. Der Körper, der durch Rotation dieser Fläche um die y-Achse entsteht, entspricht modellhaft der Form eines Kassenhäuschens mit kreisförmiger Grund- und Deckfläche ($1\text{ LE} = 1\text{ m}$).
Der größere der beiden Kreise beschreibt die Grundfläche.
Ein Architekturbüro plant für das Kassenhäuschen ein Dach, welches einen parabelförmigen Querschnitt besitzt. Das passgenau aufgesetzte Dach soll eine Querschnittsfläche von $\frac{1}{3}\text{ m}^2$ besitzen. Ermitteln Sie die Gleichung eines möglichen Graphen, der die obere Begrenzung des Dachquerschnittes beschreibt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	7	17	6	5	5	40

Anlage

Anlage zu Aufgabe 1.2: Kassenhäuschen