10 Basisförderung Mathematik

Charlotte Zwack-Stier

Das folgende Verfahren dient den Grundschullehrkräften der frühzeitigen Prävention von Problemen beim Mathematiklernen im Anfangsunterricht. Es ist für Kinder bestimmt, die auf dem Weg zur Zahlvorstellung noch ganz am Anfang stehen. Zu dieser Gruppe können auch Kinder gehören, die einzelne Ziffern schreiben können oder Zahlenreihen aufsagen können. Im Folgenden werden Ihnen ein zusätzliches Verfahren zur Lernstandsanalyse und Materialien zur intensiven Basisförderung in Mathematik angeboten.

10.1 Theoretische Erläuterungen

Die folgenden Aufgaben wurden in den gemeinsamen Kontext „Kindergeburtstag" gestellt, um die Schülerinnen und Schüler durch lebensnahe Situationen zu motivieren. Dabei wurden möglichst selbsterklärende Aufgaben mit bewusst kurzen durch die Lehrkraft zu gebenden Erläuterungen konstruiert.
Mit dieser Aufgabensammlung können Sie in Erfahrung bringen, welche Kompetenzen die Kinder im Umgang mit Kardinalzahlen, mit dem Beziehungsaspekt von Zahlen, mit dem Ordinalzahlaspekt und mit ersten additiven und subtraktiven Operationen haben. Anschließend geht es darum, mit jenen Kindern, die der Förderung bedürfen die unter 4.4. dargestellten pädagogischen Angebote durchzuführen. Dem Verfahren liegen folgende Grundbegriffe zugrunde:

Klassifikation

Auf Schülerseite ist die Erkenntnis zu entwickeln, dass unendlich viele Mengen mit deutlich voneinander abgrenzbaren Elementen

- unabhängig von deren Aussehen (qualitative Freiheit) und
- unabhängig von deren Anordnung (strukturelle Freiheit, Anzahlinvarianz)
- *allein* unter dem Aspekt der ANZAHLIGKEIT (Wie viele?) zu Klassen zusammengefasst werden können.

Die Kardinalzahl ist die Klasse aller gleichmächtigen Mengen

- Jede dieser Klassen (... 3er-Klasse, 4er-Klasse ...) kann durch Symbole gekennzeichnet werden (z. B. Punkte, Striche ...)
- Da mit steigender Anzahl der Symbole die rasche komplexe Erfassung der Zahleigenschaft der Menge deutlich abnimmt, werden Zahlensymbole (Ziffern) eingeführt.
- Jede so gebildete Klasse wird mit einem Zahlwort benannt.

Das Lernziel Klassifikation im Zahlenraum 1 - 10 ist erreicht, wenn die Kinder

- Mengen in die entsprechenden Klassen einordnen,
- ihnen die passenden (Punkt) Symbole,
- Ziffern und
- Zahlwörter zuordnen können und umgekehrt.

Die Zahlzeichen (Ziffern), die Zahlwörter und die gezählten Objekte weisen keinerlei Ähnlichkeiten auf. Sie können *nicht* voneinander abgeleitet werden. Das Hersagen der Zahlwortreihen allein („...kann schon bis ... zählen") gibt wenig diagnostische Auskunft über Mengen- und Mächtigkeitsvorstellungen. Deshalb ist es sachstrukturell unabdingbar den Kindern *zusammen* mit der Einsicht in die Klassifikation die der Reihenbildung (Serienbildung) zu vermitteln.

Seriation

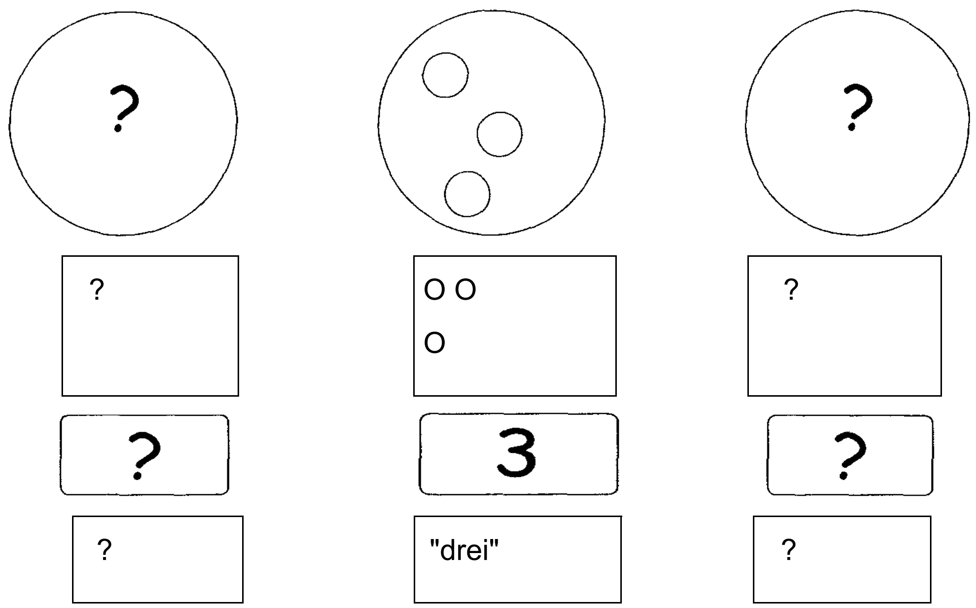
Die Einsicht in das Prinzip der Seriation umfasst die Erkenntnis, dass die Klassen in einer ganz *bestimmten* Reihenfolge angeordnet sind.

Jede gebildete Klasse (Ausnahme: Klasse mit null Elementen) hat eine Nachbarklasse mit genau *einem* Element mehr oder weniger.

Das Lernziel Seriation im Zahlenraum 0-10 ist erreicht, wenn die Kinder

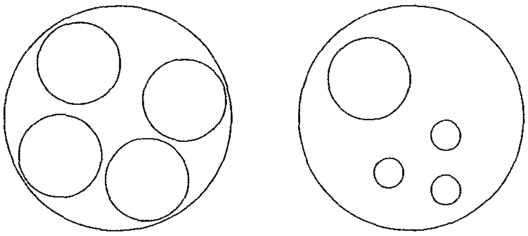
- die Klassen
- die (Punkt)Symbole
- die Ziffern und
- die Zahlwörter

in der *richtigen* Reihenfolge können.



Qualitative Freiheit (Repräsentanz)

Die durch die Klassifikation von den Kindern abgeforderte Leistung, Mengen ausschließlich *quantitativ* zu beurteilen setzt, wie bereits erwähnt, die Fähigkeit voraus, bei der Beurteilung der Mächtigkeit von Mengen vom Aussehen der Elemente zu abstrahieren. Beim „Absehen vom Aussehen" scheint der Faktor *Größe* bei vielen Kindern die entscheidende Rolle zu spielen. Sie *zählen* z. B. ohne Probleme bei folgender Abbildung zweimal vier Elemente ab, beantworten aber die Frage, ob auf jedem Teller gleich viele Elemente (z. B. Plätzchen etc.) lägen, mit „nein". Ihr visueller Eindruck (auf dem linken Teller liegen größere Plätzchen) dominiert ihr Mächtigkeitsurteil.



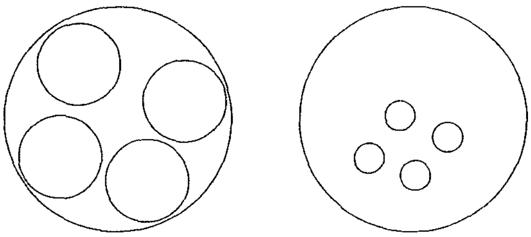
Paarbildung und Begriffe zum Mächtigkeitsvergleich: mehr - weniger - gleichviel - Elemente

Ein relativ „störungsfreies" pränumerisches Maß zur Beurteilung der Mächtigkeit zweier zu vergleichender Mengen ist die Paarbildung. Zwei Mengen sind dann gleich mächtig, bzw. umfassen gleich viele Elemente, wenn es möglich ist, jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge paarweise (eineindeutig) zuzuordnen, ohne dass in einer der beiden Mengen Elemente übrig bleiben. Ist das jedoch der Fall, enthält eine Menge offensichtlich *mehr* bzw. *weniger* Elemente als die andere.
In der Praxis zeigte sich, dass der verstehende Umgang mit dem Begriff „gleich viele Elemente" deutlich schwieriger zu entwickeln war, als die Begriffe „mehr Elemente" bzw. *„weniger* Elemente".

Anzahlinvarianz

Die Paarbildung und die Kenntnis der Begriffe zur Mächtigkeitsbeurteilung solcher paarweise zugeordneten Mengen ist unabdingbare Lernvoraussetzung in die Einsicht der Anzahlinvarianz.

Sie ist als die Fähigkeit zu definieren, bei der Beurteilung der Mächtigkeit von Mengen von der unterschiedlichen Anordnung der Elemente abzusehen. Wäre ein Kind z. B. von folgender Abbildung bei der Bestimmung der Zahleneigenschaft der solcher Art abgebildeten Mengen verunsichert, könnte es über die Methode der Paarbildung zu einem zweifelsfreien Urteil gelangen. Sein visueller Eindruck kann durch konkrete Handlung überprüft und das Urteil eventuell revidiert werden.



Als „Basis"strukturelement zur Entwicklung des Zahlbegriffs ist die Kenntnis von Eigenschaftskategorien (Farben-, Formen- und Größenklassen) zu nennen. Wie oben erwähnt, müssen die Kinder bei der Klassifikation (Beurteilung der Mächtigkeit allein nach der Anzahligkeit der Elemente) von allen Eigenschaften der Elemente abstrahieren. Ich kann nur von etwas absehen bzw. abstrahieren, von dem ich Kenntnis habe, das ich sachgerecht aktiv sprachlich benennen oder zumindest passiv verstehen kann.

Mengen- und Zahleninklusion

Mit der Einsicht in das Prinzip der Seriation (+1; -1) ist ein erster Schritt zur Vorbereitung des Operationsverständnisses geleistet worden. Ein weiterer, sehr wichtiger Schritt wäre die Vermittlung in die Einsicht der Mengen- und Zahleninklusion der Erkenntnis, dass in einer vorhandenen Menge (z. B. 5er-Menge) alle kleineren enthalten (inkludiert) sind, bzw. der Rückschluss von dem zuletzt genannten Zahlwort (z. B. „fünf") auf die inkludierte Menge vollzogen wird.

10.2 Übersicht über die Grobziele zum Zahlbegriffserwerb

Begriffe	Lernschritte und -ziele
Kenntnis von Eigenschaftskategorien: Farbe – Form – Größen	Vermittlung, Erweiterung von Farb-, Form- und Größenbezeichnungen und –unterscheidungen
Paarbildung	Eins-zu-eins-Zuordnung als pränummerisches Maß zur Beurteilung des Mächtigkeitsvergleichs von Mengen kennen und anwenden können. Die Relationsbegriffe „...hat mehr, weniger, gleich viele Elemente" bei der Beurteilung der Mächtigkeitsrelationen von Mengen verwenden können.
Anzahlinvarianz (strukturelle Freiheit)	Bei der Beurteilung der Mächtigkeit von Mengen von der Anordnung der Elemente absehen können.
Repräsentanz (qualitative Freiheit)	Bei der Beurteilung der Mächtigkeit von Mengen von dem Aussehen, der äußeren Qualität der Elemente (v. a. Größe) absehen können.
Klassifikation	Erkenntnis entwickeln, dass zu *jeder* (Ausgangs-)Menge unendlich viele weitere Mengen gefunden (gebildet) werden können, die genau so viele Elemente aufweisen. Mengen, die ausschließlich unter dem Merkmal der Anzahligkeit der Elemente betrachtet werden, bilden dieselben *Klassen*. Die symbolische Darstellung erfolgt über - Mengenzeichen (z. B. Punktsymbole)

	- Zahlzeichen (Ziffern) - Zahlwörter
Seriation Klasseninklusion	Erkenntnis entwickeln, dass zu jeder (Ausgangs)Menge eine solche hergestellt werden kann, die genau ein Element mehr bzw. weniger hat. Dadurch sind auf- und absteigende Mächtigkeitsfolgen erstellbar. Ausnahme: „leere Menge" Erkenntnis entwickeln, dass in die jeweils herzustellende Menge immer alle „kleineren" „eingeschachtelt" sind. Entdecken der *Unabdingbarkeit* der inkludierten Teilmengen.
Zahloperationen	Verstehender Umgang mit den Operationszeichen „+", „–„ und „=" entwickeln. Verdeutlichen, dass (z. B.) 3+4=7 4+3=7 7=4+3 7=3+4 7=3+أ 7=أ+4 أ=3+4 nur verschiedene Notationsformen ein und desselben Sachverhalts sind.

10.3 Überblick über alle Aufgaben im Bereich Basisförderung Mathematik

Folgende Aufgaben ermöglichen die detaillierte Feststellung der Förderschwerpunkte. Die Aufgaben können in Kleingruppen oder mit der ganzen Klasse durchgeführt werden:

Aufgabenstellung/ mathematischer Prüfbereich	Vorgehen	Beobachtungsschwerpunkt
1. „Kindergeburtstagssituation" Torte mit sechs Kerzen	L. führt die Kinder kurz in die Rahmenhandlung ein	Situationsverständnis Symbolwissen (Kerzenanzahl symbolisiert Anzahl der Lebensjahre)
2. Menge/Zahl-Zuordnung Anzahlbestimmung (Menge mit neun Elementen), Kardinalzahlaspekt	L. erklärt kurz die Situation und fordert die Kinder auf, zu versuchen herauszubekommen, wie viele Geburtstagsgäste eingeladen sind	Strategien der Mengenerfassung: - Niveau des Zählens -eins-zu-eins Zuordnung - lautes Mitsprechen der Zahlworte - Notationsformen? - Punkte, Striche, Ziffern
3. Paarbildung Beurteilung der Mächtigkeit zweier zu vergleichender Mengen Begriff: gleich viele	L. erklärt die Situation	Strategie zur Beurteilung der Mächtigkeitsrelation: - Wird jede Menge abgezählt? - Werden Striche gezogen? (je ein Kinderbild mit einem Luftballon verbunden)
4. Menge/Zahl-Zuordnung bei ungeordneten Mengen, Finden von gleich mächtigen Mengen bei unterschiedlicher Anordnung der Elemente, Kardinalzahlaspekt, Anzahlinvarianz	L. führt in die Problemstellung ein, demonstriert *eventuell* an einem Bsp. (z. B. 6er- Menge) die Vorgehensweise an der Tafel	Strategie der Mengenerfassung: - komplex - abzählend - nur mit den Augen - antippend mit Stift - abstreichend mit Stift - Zuordnung der richtigen Ziffer
5. Zahl/Menge-Zuordnung bis zu zehn Elementen Kardinalzahlaspekt	L. erklärt die Aufgabenstellung	Strategie der Mengenherstellung: - Werden Striche, Punkte, gezeichnet? - Wie ist die Anordnung der Elemente? z. B. immer linear oder werden eventu-

		ell Gruppen gebildet? (z.B. zwei 4er oder zwei 5er-Gruppen) Wird die geforderte Menge korrekt erstellt, auch bei ansteigender Anzahligkeit?
6. Vorbereitung von Addition und Subtraktion: Herstellen gleich mächtiger Mengen durch hin zumalen bzw. wegstreichen von Elementen	L. führt in die Aufgabenstellung ein. Je nach Einschätzung der Klassensituation kann es angebracht sein, ein Bsp. an der Tafel zu demonstrieren	Aufgabenverständnis Zählt das Kind die Menge immer wieder ab? Stellt es Gleichmächtigkeit her?
7. Mengenanalyse (Menge 6) auf der Ebene der teilweisen Vorstellung Ordinalzahlaspekt	L. erklärt die Aufgabenstellung	Die Ausgangsmenge steht zum Vergleich zur Verfügung, es ergeben sich folgende Beobachtungsschwerpunkte: Wird die abgebildete Menge zum Vergleich genützt? Kann von der in Ziffern angegebenen Anzahl der stehengebliebenen Dosen auf die Zahleigenschaft die Anzahl der abgeworfenen Dosen geschlossen werden? Wie wird notiert? Striche, Dosen, Ziffern? Kann der „Sieger" bestimmt werden? Wird insgesamt eine korrekte Rangfolge erstellt?

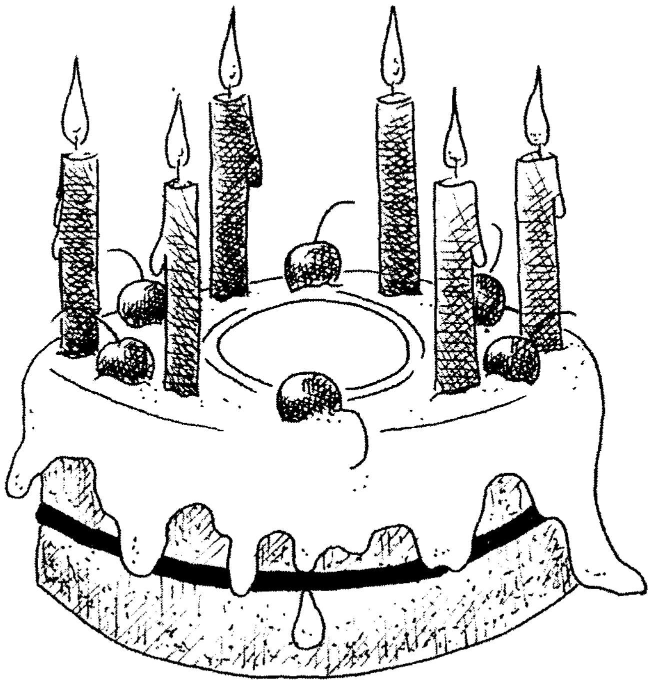
8. Addition/Subtraktion im Zahlenraum bis 10 Überprüfung des Operationsverständnisses	Um nicht zu lange zu erklären, kann es angebracht sein, ein Beispiel an der Tafel zu demonstrieren, zeilenweises Vorgehen wird empfohlen.	Strategie der Anzahlsfeststellung der Gesamtmenge: Wird gezählt? (ab-, weitergezählt) Wie wird die Gesamtmenge symbolisiert?: - als Punktmenge - als Ziffer - als Aufgabe mit Operationszeichen

Nach der Auswertung der Aufgaben 1. - 8. ziehen Sie bitte zur Auswertung die Aufgabe „Leeres Blatt" aus Teil 3 des Leitfadens „Mathematik" hinzu. Sie können die Aufgabe „Leeres Blatt" mit der Aufforderung „Schreibe alle Zahlen die du kennst!" und „Schreibe alle Rechenaufgaben die du kennst!" auch wiederholen.

10.4 Aufgabenbeschreibungen

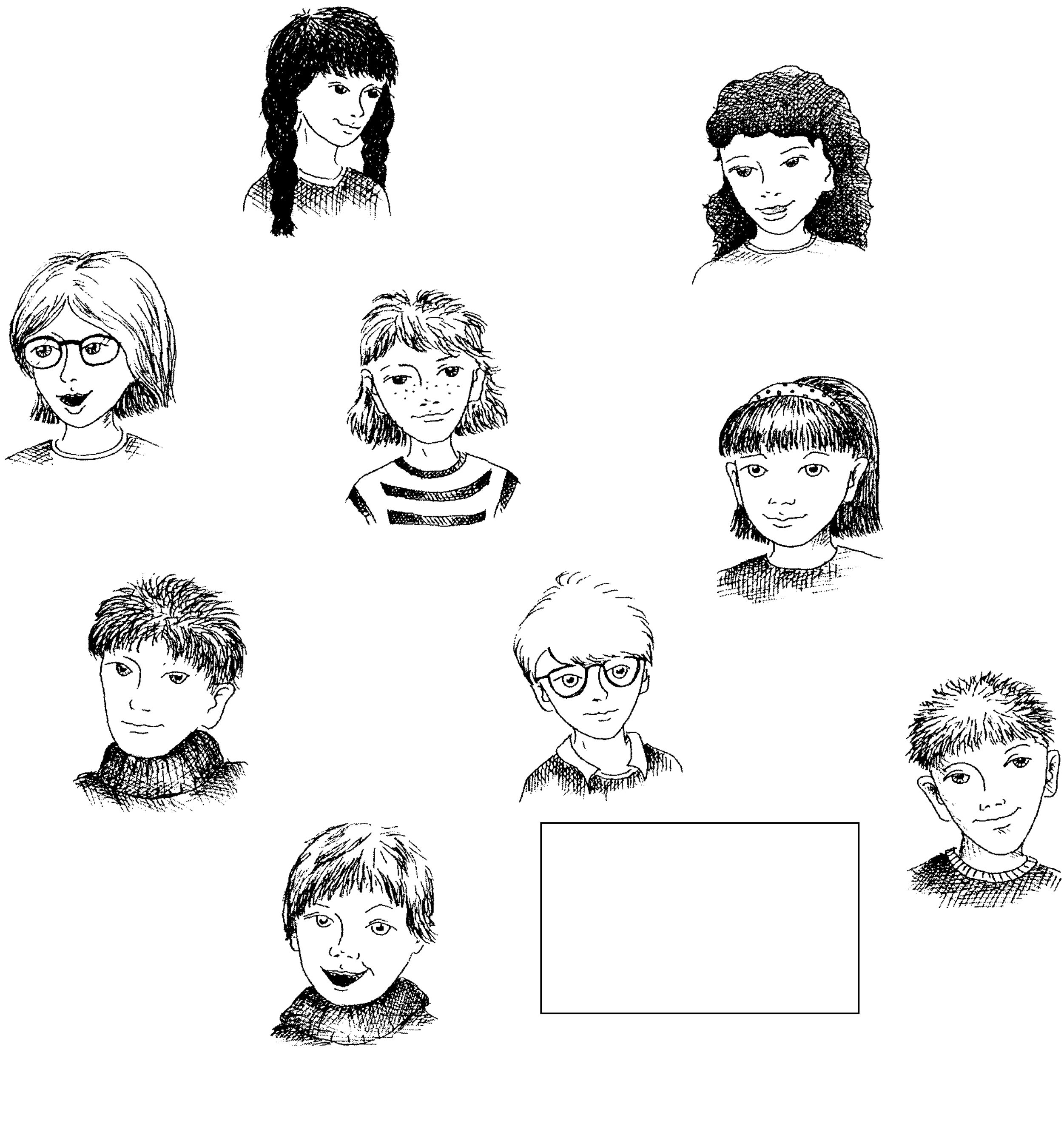
Um herauszufinden, welche Kinder eine Basisförderung Mathematik benötigen, beobachten Sie bitte Ihre Schülerinnen und Schüler kontinuierlich im Unterricht. Stellen Sie fest, wer im Verfahren zur Lernstandsanalyse Mathematik in Teil 3 des Leitfadens die Aufgaben 3, 4 und 5 nicht lösen konnte und analysieren Sie die Ergebnisse der Aufgabe „Leeres Blatt". Bitte führen Sie mit diesen Kindern die folgenden Aufgaben durch. Sie benötigen dafür ungefähr 20 Minuten Zeit.

1. Heute ist _______________ Geburtstag.
   Die Mutter hat einen leckeren Geburtstagskuchen gebacken.
   Hast du eine Ahnung, wie alt sie/er geworden ist?



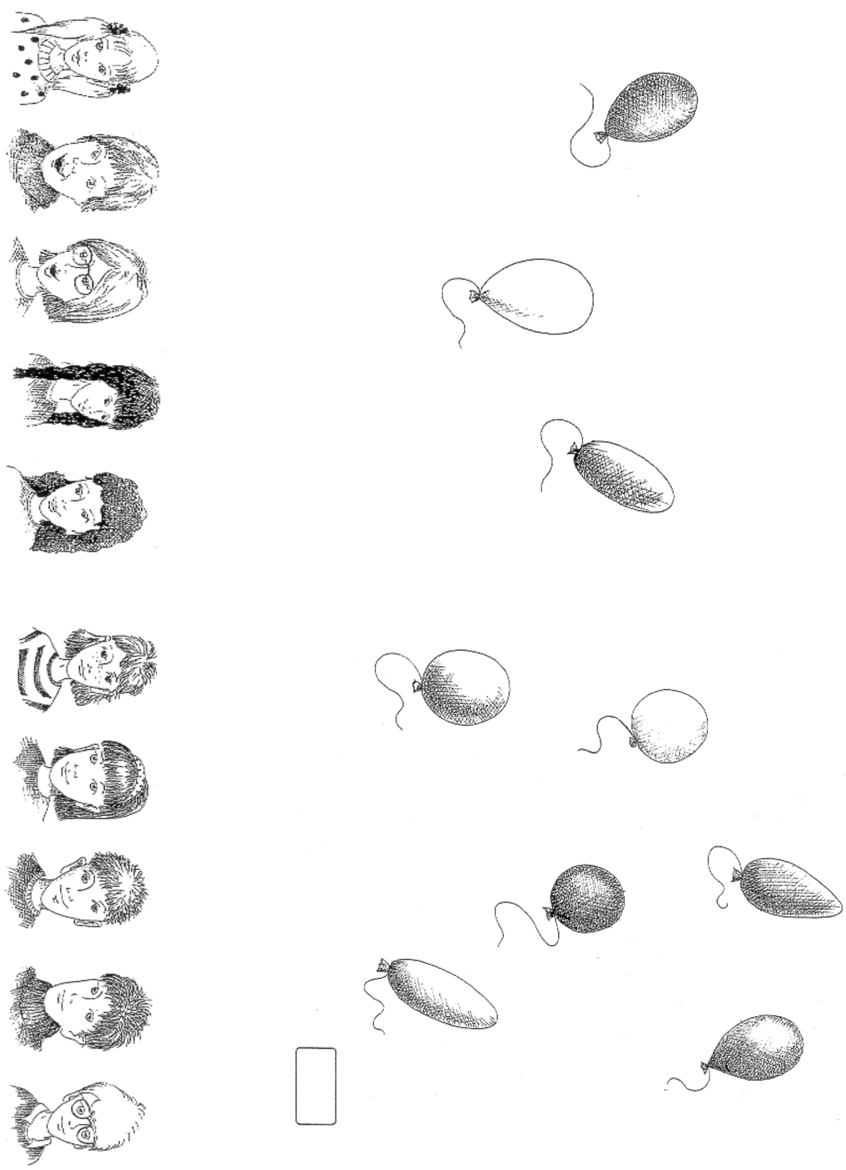
Schreibe in den Kreis des Kuchens, wie viel Jahre ________ geworden ist!

2. So viele Kinder hat _______________ zum Geburtstag eingeladen.
   Kannst du in das leere Kästchen unten schreiben, wie viele Kinder du siehst?



3. ______________ hat ein Luftballonspiel vorbereitet. Dafür braucht jedes Kind **einen** Luftballon.

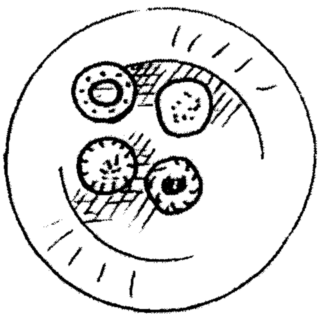
Haben sie denn genug Luftballons? Überlege dir, wie du heraus "bekommst, ob jedes Kind einen Luftballon bekommt. Wenn ja, mache in das leere Kästchen ein Kreuz, wenn nein einen Strich.



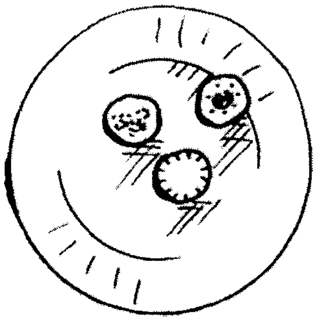
Mama hat für den Geburtstag noch viele kleine Plätzchen gebacken.

4a Wie viele Plätzchen siehst du auf jedem Teller? Kreuze an!

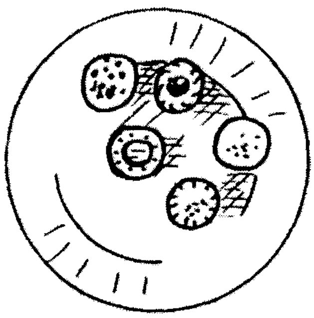
4b Auf zwei Tellern liegen gleich viele Plätzchen. Male diese beiden Teller rot an.
(Evtl. Beispiel an der Tafel vormachen)



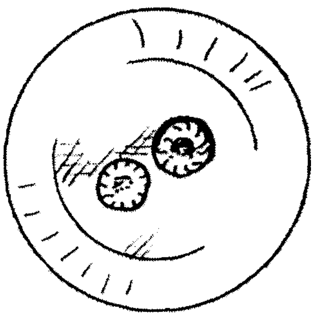
1	2	3	4	5	6	7



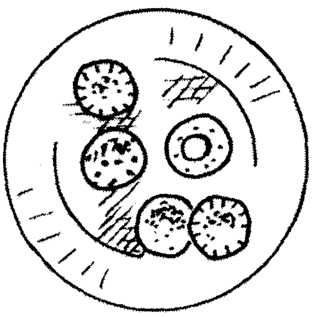
1	2	3	4	5	6	7



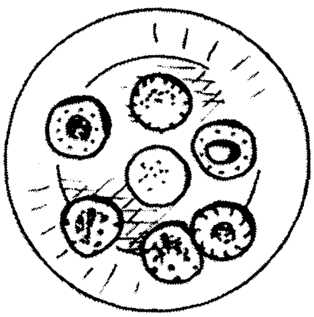
1	2	3	4	5	6	7



1	2	3	4	5	6	7

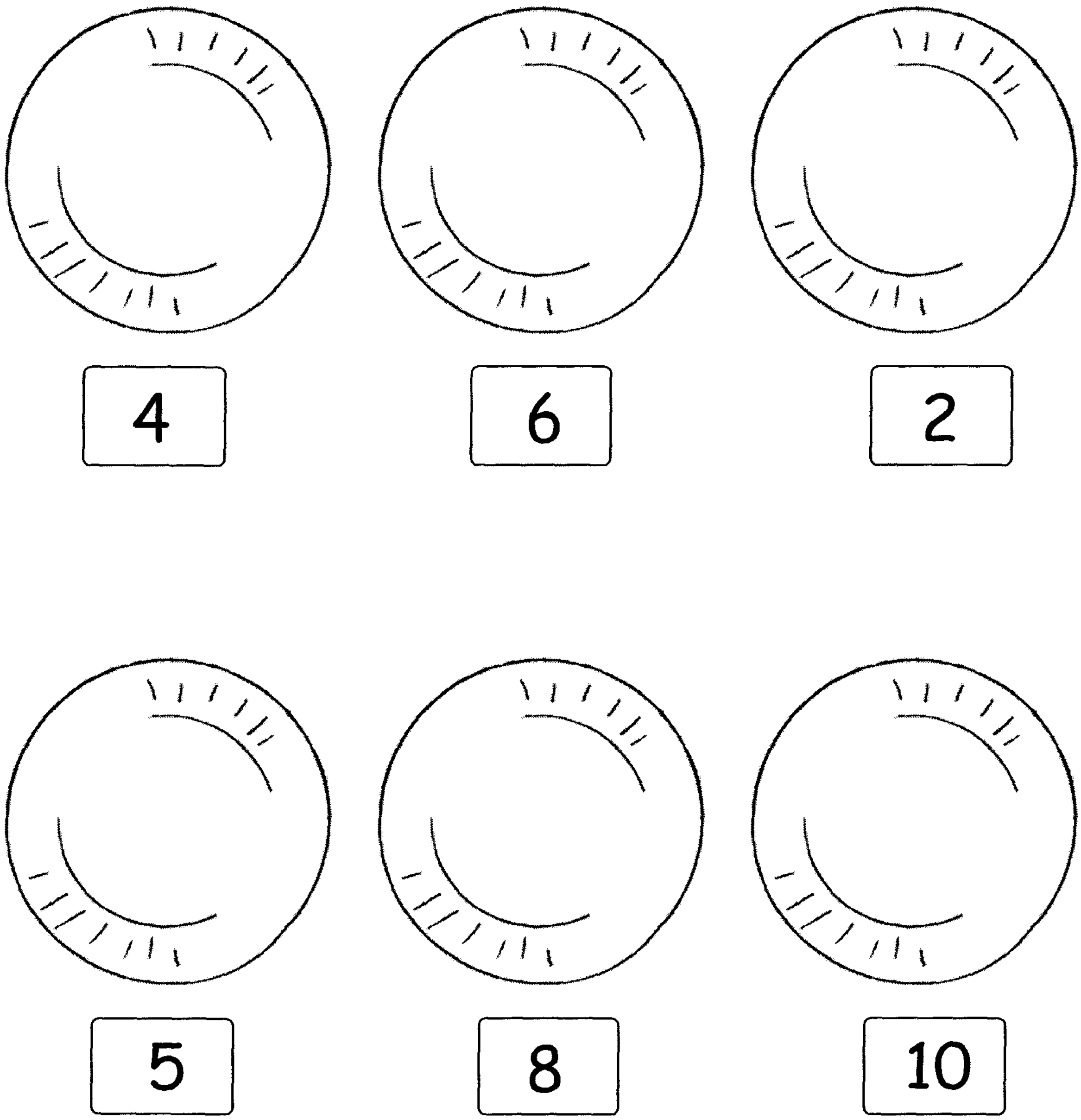


1	2	3	4	5	6	7



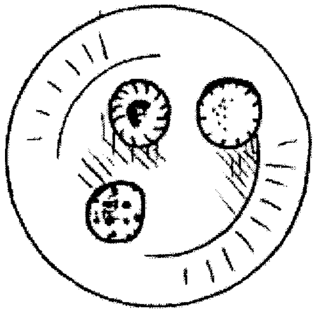
1	2	3	4	5	6	7

5. Du sollst jetzt selbst Plätzchen auf die Teller malen und zwar immer so viele, wie unter den Teller aufgeschrieben sind.



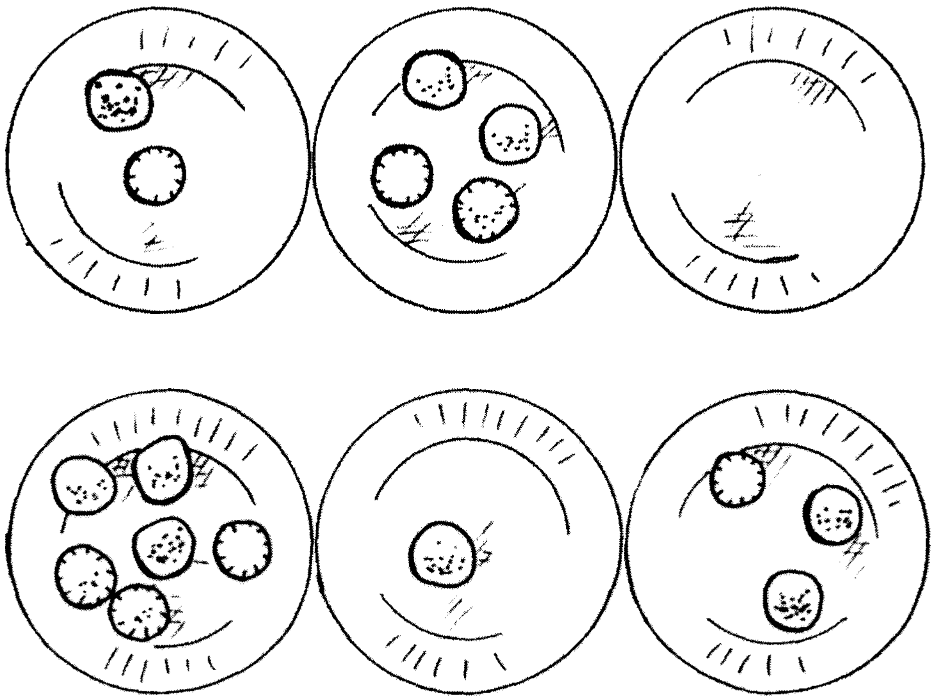
6. _____hat sich drei leckere Plätzchen

auf den Teller gelegt.



Sie/er möchte, dass jedes Kind genauso viele Plätzchen bekommt wie sie/er. Kannst du das machen?

(Evtl. Beispiel an der Tafel vormachen)

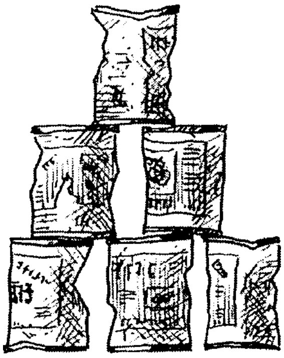


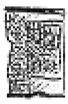
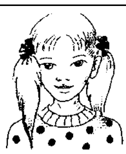
7a Die Kinder spielen "Büchsenwerfen".

Schreibe in jedes Kästchen, wie viele Büchsen bei jedem Kind umgefallen sind.

7b Nach jeder Runde bekommt der Sieger einen kleinen Preis. Bekommst du heraus, wer in dieser Runde gewonnen hat?

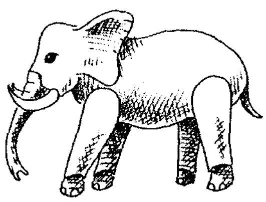
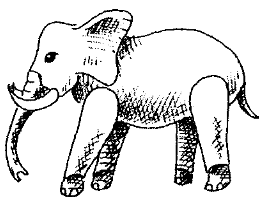
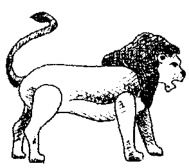
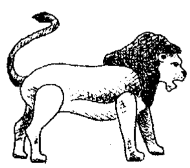
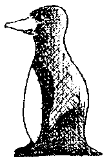
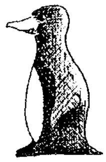
Kreuze den Kreis des Siegers an.



			
	**5**		○
	**1**		○
	**2**		○
	**4**		○
	**0**		○

8a

____________ wünscht sich von den Eltern und Gästen Spieltiere für ihren Zoo. Vor dem Geburtstag hatte sie schon Affen, Elefanten, Löwen und Pinguine. Sie bekommt von jeder Tierart noch welche dazu. Kannst du in das leere Kästchen schreiben, wie viele sie/er jetzt von jeder Sorte hat? Wenn du willst kannst du auch eine Rechenaufgabe dazu schreiben

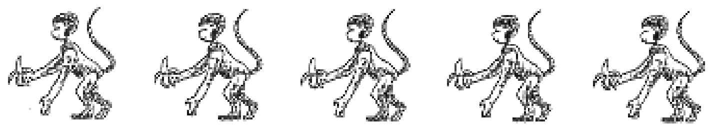
Sie/er hatte schon	Sie/er bekommt	Wie viel hat sie/er jetzt?
2 	3 	
3 	1 	
1 	5 	
5 	4 	

8b Am Abend spielt das Geburtstagskind mit seinem Bruder.

Er hat besonders die Pinguine und Affen sehr gerne. Das Geburtstagskind schenkt ihm einen Affen und zwei Pinguine.

So viele hatte das Geburtstagskind:

Wie viele hat es jetzt noch?



10.5 Basisförderung Mathematik
Klassen - Auswertungsbogen

Klasse: Datum:		Name									
Abgefragter Bereich											
Einführung in situativ. Kontext	1. Kindergeburtstag										
	2. Anzahl der Gäste										
	3. Bekommt jedes Kind einen Luft-ballon?										
Umgang mit Kardi-nalzahlaspekt	4a. Menge / Zahl-Zuordnung										
	4b. Erkenntnis der Gleichmächtigkeit										
	5. Zahl / Menge-Zuordnung										
	6. Gleichmächtigkeit										
Beziehungs-aspekt	7a. Notation der Zahleigenschaft der abgeworfenen Elemente										
Ordinal-zahlaspekt	7b. Reihenfolge bestimmen										
Addiditon / Subtraktion	8a. Addition										
	Affen										
	Elefanten										
	Löwen										
	Pinguine										
	8b. Subtraktion										
	Pinguine										
	Affen										

10.6 Pädagogische Angebote zur Basisförderung Mathematik

Pädagogische Angebote zur Basisförderung Mathematik in sechs Bereichen:

Angebot 1	Verstehen und aktives Benennen von Eigenschaftskategorie
Angebot 2	Paarbildung
Angebot 3	Absehen von der Größe der Elemente bei der Beurteilung der Mächtigkeit
Angebot 4	Anzahlinvarianz
Angebot 5	Seriation
Angebot 6	Mengenanalyse

Bitte führen Sie die Spiele und Übungen der pädagogischen Angebote 1. bis 6. mit den Kindern, die Unsicherheiten hinsichtlich dieser Kompetenzen haben, durch. Bitte notieren Sie in Ihrem pädagogischen Tagebuch die wichtigsten Beobachtungen, die Sie zu den kindlichen Lernprozessen machen.

Angebot 1: Aktives Benennen von Eigenschaftskategorien (Farbe, Form, Größe)

Spielerische Übungsformen:

Tastspiele (Kategorie Farbe scheidet aus)

Klötzchen unterschiedlicher Form und Größe in ein Säckchen geben, ein Klötzchen benennen und ertasten lassen.

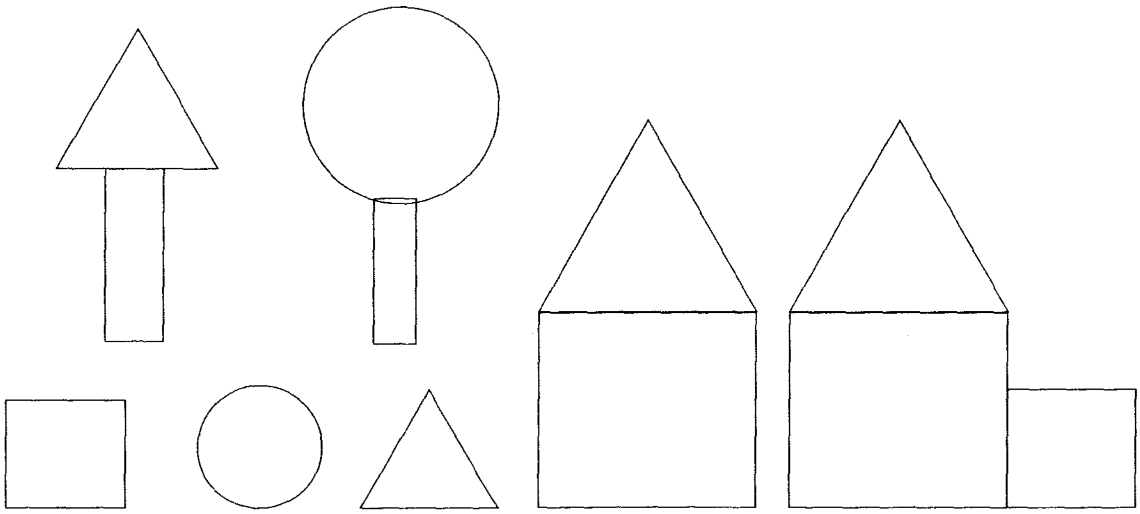
> Leichtere Form: Lehrkraft zeigt z. B. ein großes Dreieck und fordert die Kinder auf, dieselbe Form zu ertasten.
> Schwierigere Form: Das Kind ertastet ein Klötzchen und bestimmt dessen Eigenschaften („Ich habe ein kleines Quadrat in der Hand.").

Ratespiele

Ein Kind verlässt die Klasse, ein anderes sucht sich ein Klötzchen, bestimmt seine Eigenschaften und versteckt es. Das hereingerufene Kind versucht, durch gezieltes Fragen die Eigenschaften des versteckten Klötzchens zu bestimmen. „Ich sehe was, was du nicht siehst, und das ist groß und rot." „Mein rechter Platz ist leer, ich wünsche mir.. her" (jedes Kind hat eine Symbolkarte umgehängt).

Basteln

- evtl. mit Schablonen Formen selbst herstellen und Figuren legen (kleben) lassen
- Bilder und Collagen aus Formen herstellen, z. B.: Laubwald, Nadelwald, Landschaften, Häuser



Angebot 2: Paarbildung und Begriffsbildung (mehr - weniger - gleich viele Elemente)
Bau- und Spielsituation mit Duplosteinen

- verschiedene Steine (zwei Farben, die das Kind kennt und benennen kann) sind durcheinander und sollen in zwei Kisten sortiert werden.
- Sind in jeder Kiste gleich viele Steine?
- mögliche Lösungsvorschläge der Kinder sammeln
- jeder von uns baut mit seinen Steinen einen Turm (Straße ...)

- entweder sukzessiv (schwerer) oder
- asynchron (leichter)

Diese Spielsituation bietet eine Fülle diagnostischer Beobachtungskriterien:

- sortiert das Kind sicher die verschiedenfarbigen Duplosteine in die beiden Farbklassen? Wenn nicht, versteht es meine Aufgabenstellung nicht? Welche Hilfen könnte ich geben? *Eine* Möglichkeit wäre, je ein Klötzchen von einer Farbe in je eine Kiste „vor"zulegen und nun das Kind aufzufordern, die gleich aussehenden Klötzchen dazu zu legen (*zuordnen* von Gegenstand zu Gegenstand). Gelingt dies, wäre sofort eine Steigerung des Anforderungsniveaus in dieser Spielsituation denkbar: Z. B. ein Kind spielt mit. Klötzchen in drei verschiedenen Farben werden zusammengeschüttet und müssen jetzt in drei Kisten auseinander sortiert werden.
- Bei der Einschätzung hinsichtlich der Menge der vorhandenen Steine (je Farbklasse) ist es unabdingbar, den Lösungsvorschlägen der Kinder genau zuzuhören:
  - Zählen sie? Wie zählen sie? Wie weit zählen sie?
  - Stimmt die Menge mit den Zahlwörtern überein?
  - Verändern sie ihr nummerisches Urteil, sobald ich sie verunsichere, indem ich z. B. die Anordnung der Steine verändere?
- Da ich auf jeden Fall eine Klötzchenmenge wähle, deren Ausgangsmenge von 5 bis 7jährigen Kindern *nicht* komplex erfassbar ist (wie langweilig und wenig spannend wäre es, einen „Turm" aus zwei oder drei oder vier Klötzchen zu bauen?) muss ich vielleicht notwendigerweise noch andere Lösungswege finden, um zu einem sofort sichtbaren, genauen Mächtigkeitsvergleich zu kommen.
- Ein Vorschlag wäre z. B. mit den Klötzchen der einen Farbe eine „Straße" zu legen ■ ■ ■ ■ ... und die Klötzchen der anderen Farbe paarweise dazu zu legen. Häufig zu beobachten ist nun, dass die Kinder dieser Alterstufe zwar den Beginn und das Ende der vorgelegten Reihe beachten, nicht aber die „Binnenstruktur" („Randbeachter"). Sie haben keine Probleme, etwa folgende gelegte Situation als *gleich* mächtig einzustufen.

■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

□ □

Ihr optischer Eindruck (die beiden Straßen sind gleich lang) überlagert die Nichtbeachtung der Paarbildung bei der Beurteilung der Mächtigkeit

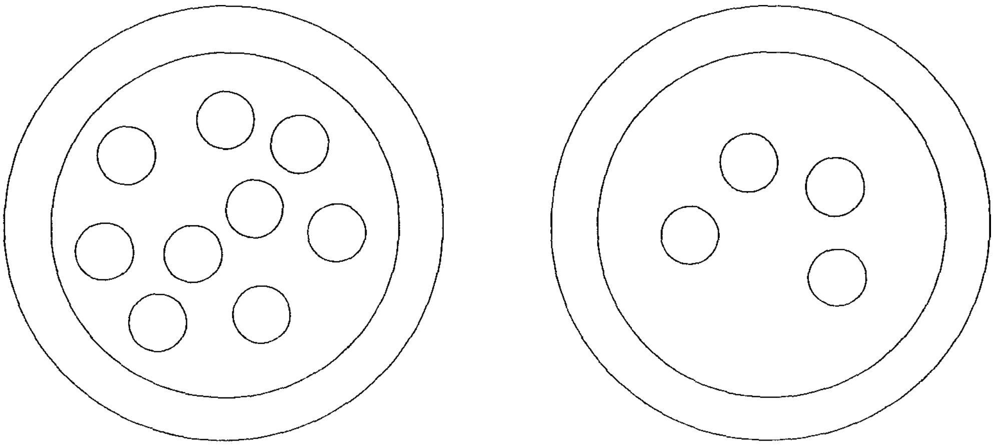
Wenig sinnvoll wäre es jetzt, auf das Abzählen als Kontrolle zu verweisen oder dieselbe Situation mehrmals zu wiederholen. Erfolgversprechender ist es, in dieser Spielsituation Wissen parat zu haben, wie die Komplexität der Sache verringert und adäquate Handlungshilfen bereit gestellt werden können. Ein Weg ist auch die Zuordnungsform zu verändern. Es werden nicht mehr alle Steine einer Farbe vorgelegt und dann die anderen nachgelegt (sukzessive Form der Zuordnung), sondern zu einem roten Stein wird je ein gelber gelegt und umgekehrt. Dabei entsteht automatisch immer ein „Paar" (asynchrone Form der Zuordnung). In dieser Spielsituation (asynchrone Form) verstehen die Kinder die Methode der Paarbildung oft spontan und man kann beim zweiten Spiel schon die schwierigere Form der Zuordnung wählen.

Gelingt die Paarbildung auch bei der asynchronen Form der Zuordnung nicht, kann es sich als verstehensfördernd (hinsichtlich der Methode der Paarbildung) erweisen, den Kindern sehr strukturiert Zuordnungshilfen zur Verfügung zu stellen. Zusammen geklebte Innenteile von Streichholzschachteln, Eierkartons, Einsätze von Süßigkeitspackungen, Legebretter,... können als Raster dienen, die bei der Zuordnung die Paarbildung sehr unterstützten.

Gelingt sie schließlich (auch ohne Zuordnungshilfen), kann man mit den Kindern zusammen die Begriffe für den Mächtigkeitsvergleich - mehr - weniger - gleich viele Elemente erarbeiten.

Hier ist zu beachten, dass der Begriff „gleichviel Elemente" am schwierigsten ist. Er steht am Ende des Lernprozesses und entsteht aus den Handlungen des Hinzufügens bzw. Wegnehmens von Elementen.

Bei der Aneignung der Begriffe empfiehlt es sich, ausgehend von großen Mengenunterschieden (z. B. Teller mit sehr vielen Smarties und Teller mit weniger Smarties) zuerst die Begriffe „mehr" und „weniger" (Smarties, Autos, Plätzchen...) zu entwickeln. Welchen Teller möchtest du haben? Warum?



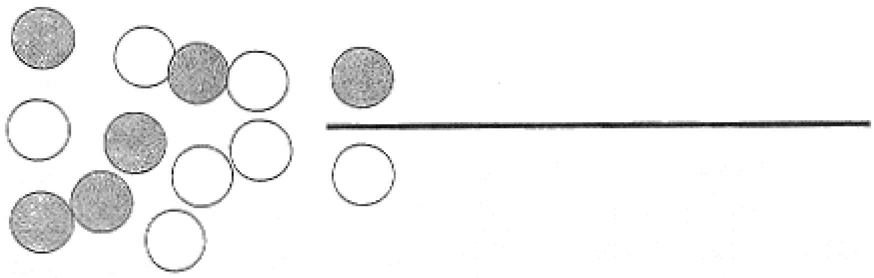
Auf der sicheren Kenntnis dieser Begriffe kann allmählich - durch Hinzufügen bzw. Wegnehmen von Elementen - mit der Erarbeitung des Begriffs „gleich viele" Elemente begonnen werden.

Gut geeignete Materialien für Zuordnungsübungen und sich anschließende Mächtigkeitsvergleiche sind:

- Duplosteine (Vergleich der Höhe der Türme, der Länge der Straße)
- Perlen (aufgezogen auf Gummibänder)
- Haftmaterial für Filztafel (Blumen, Bäume, Tiere)
- Magnetelemente
- Wendeplättchen

(Nehmen Sie mindestens elf Wendeplättchen und lassen Sie diese aus der Hand auf den

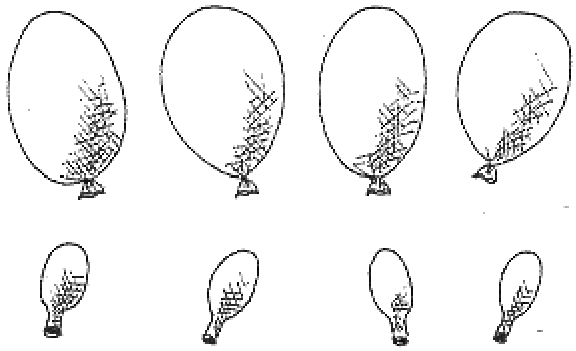
Tisch fallen. Gewonnen hat, wessen Farbe am häufigsten/seltensten fällt. Schwierige Entscheidungen werden durch Stück-für-Stück-Zuordnung überprüft.) „Ich habe gewonnen. Es sind mehr rote als gelbe Plättchen."



Angebot 3: Absehen von der Größe der Elemente bei der Beurteilung der Mächtigkeit

Übungen mit Luftballons eignen sich, Kinder zur Beurteilung gleichmächtiger Mengen bei unterschiedlicher Größe der Elemente hinzuführen. Sie sind ein Medium, an dem besonders gut demonstriert werden kann, dass die Veränderung des Aussehens (in diesem Fall der Größe der Elemente) die Mächtigkeit der Mengen nicht verändert. Zuerst soll das Kind die Gleichmächtigkeit zweier Mengen leerer roter und blauer Luftballons durch Stück-zu-Stück-Zuordnung beurteilen. Dieselbe Übung wird mit aufgeblasenen Ballons wiederholt. Lassen Sie nun die Ballons einer Farbe schrumpfen. Nun soll das Kind erneut beurteilen, ob die Mengen gleich mächtig sind. Das Kind soll sein Urteil begründen:

- Es sind keine Luftballons weggenommen worden. Es wurden auch keine dazugelegt.
- Es sind immer noch dieselben Luftballons.
- Zu jedem blauen Luftballon kann ich einen roten Luftballon legen.



Das Kind macht Erfahrungen mit dem Herstellen gleichmächtiger Mengen bei unterschiedlicher Größe der Elemente, wobei die Mengen linear geordnet bleiben.

a) Die Veränderungen der Größe der Elemente werden erfahren.
b) Die vorgegebenen Größenunterschiede werden als Ergebnis eines Veränderungsprozesses erkannt.
c) Der Veränderungsprozess wird nicht mehr angesprochen.

Angebot 4: Förderanregungen zu dem Bereich Anzahlinvarianz

Auf der Suche nach geeigneten methodischen Möglichkeiten, den Lernprozess zu unterstützen, haben sich folgende Arbeitsweisen gut bewährt:

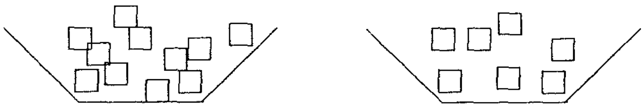
1. Perlen (u. a.) und Gummibänder

Die Einsicht in die Tatsache, dass sich Anordnungen von Mengen verändern lassen und die Veränderung wieder rückgängig gemacht werden kann, sowie darauf aufbauend die Erkenntnis, dass sie Umordnung der Elemente die Mächtigkeit der Menge nicht verändert, lässt sich besonders gut mit Perlen demonstrieren, die auf Gummibänder aufgezogen werden. Die Kinder erkennen, dass die Elemente auf dem gleichen Weg wieder auf den ursprünglichen Platz zurückkehren. Das Material lässt sich in alle Richtungen dehnen, zerren, strecken. Die Veränderung lässt sich sofort rückgängig machen. Werden die Enden der Gummibänder verknotet, können die Kinder selbst das Prinzip der Identität erkennen („Wenn die Kette geschlossen ist, kann keine Perle dazukommen oder verloren gehen; es müssen noch gleich viele Perlen sein."). Ob ich mir die Kette um den Hals lege, sie als Gürtel benutze oder sie so weit wie möglich dehne, ich weiß, dass immer gleich viele Perlen auf der Kette bleiben.

2. Duplosteine (verschiedenfarbig, verschieden groß)

Die Duplosteine (oder ähnliches Material) haben den Vorteil, dass die Kinder gerne damit spielen, dass sie die Klötzchen neben-, hinter- oder übereinander bauen können.
Folgende Lernsituationen sind möglich:

Vor den Kindern stehen zwei Körbchen mit gleich großen Duplosteinen, eines mit roten, eines mit gelben.



L: „Was schätzt (meint) ihr? Sind in den Körbchen gleich viele Bausteine?"
Sch.: schätzen, vermuten
L: Wie können wir das schnell und genau feststellen?
Die Kinder kennen die paarweise Zuordnung als geeignete Methode. Sie bilden mit beiden Mengen Reihen, ordnen die roten und gelben Steine paarweise einander zu.

rote Steine: ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

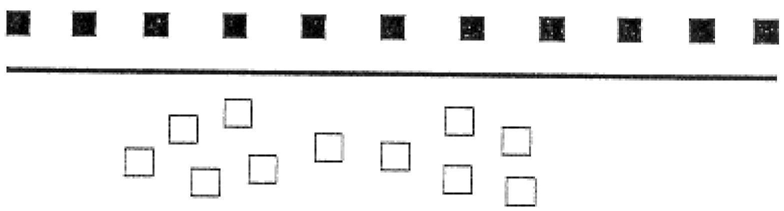
gelbe Steine: □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Die Kinder sehen sofort, dass gleich viele rote wie gelbe Steine vorhanden sind. Auf dieser Basis können nun Veränderungen durchgeführt werden.

Einige Beispiele:

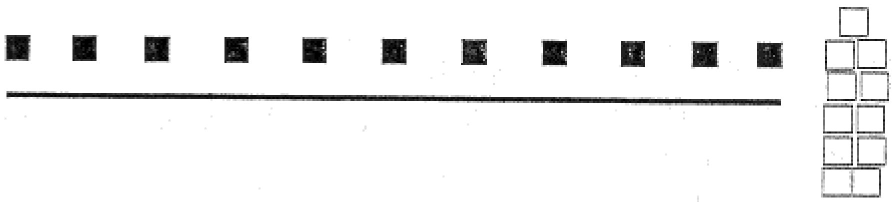
a) Die Klötzchen der einen Seite treffen sich in der Mitte, die der anderen Seite bleiben liegen.

Komplexitätsfaktoren:



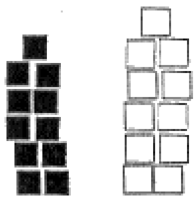
- elf Elemente
- einseitige Transformation
- alle Elemente dieser Seite in der Fläche verteilt

b) Die Klötzchen einer Seite werden zu einem Turm gebaut, die der anderen Seite bleiben liegen.



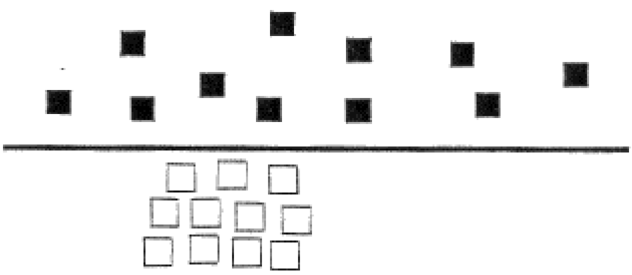
- elf Elemente
- einseitige Transformation
- alle Elemente einer Seite in den Raum verteilt.

c) Die Klötzchen beider Mengen werden zu Türmen gebaut.



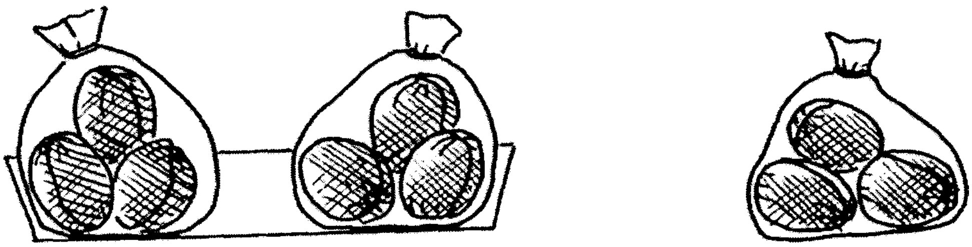
Komplexitätsfaktoren:
- elf Elemente
- zweiseitige Transformation
- alle Elemente beider Seiten im Raum verteilt

d) Die Klötzchen einer Seite springen weit auseinander, die der anderen Seite liegen ganz eng zusammen auf einem Haufen.

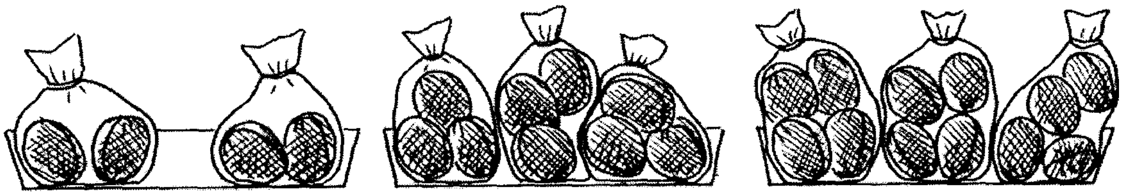


Komplexitätsfaktoren:
- elf Elemente
- zweiseitige Transformation
- alle Elemente beider Seiten in der Fläche verteilt

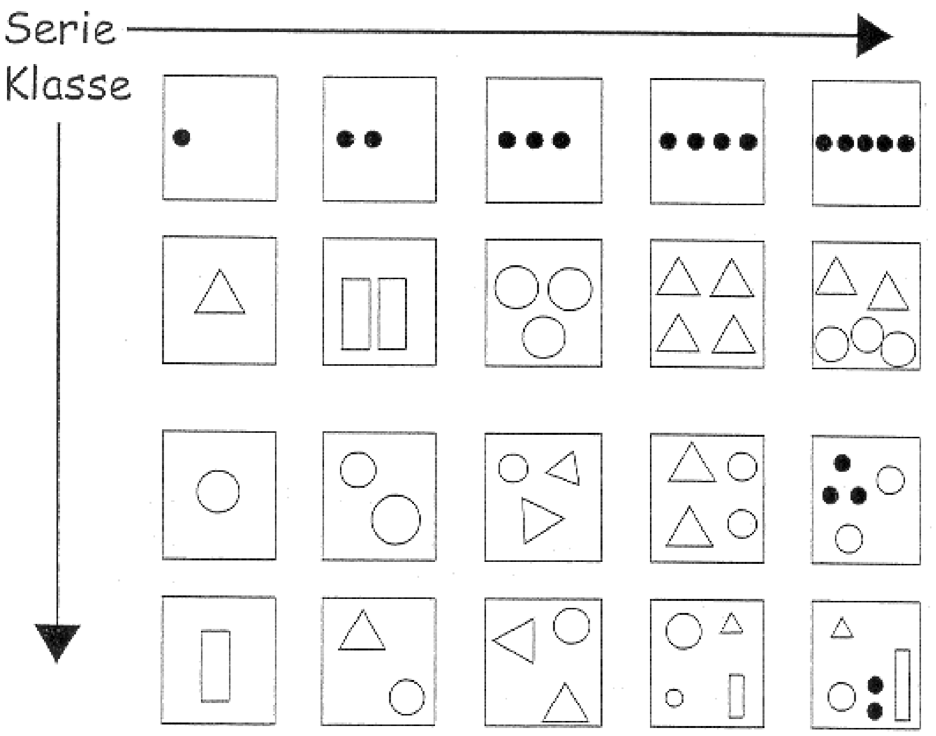
Angebot 5: Seriation
Einsicht in das Prinzip der Seriation ist dann vorhanden, wenn das Kind verstanden hat, dass die Klassen (der Mengen) in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet sind. Es weiß, dass jede Klasse eine Nachbarklasse mit einem Element weniger und eine Nachbarklasse mit einem Element mehr hat.
Es werden (Nuss-)Päckchen gepackt, die jeweils drei Nüsse enthalten.



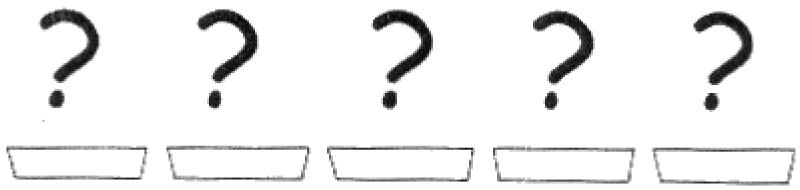
Von dieser Bezugsmenge ausgehend wird eine neue Menge hergestellt, die genau ein Element mehr oder genau ein Element weniger hat (4er- bzw. 2er Menge)



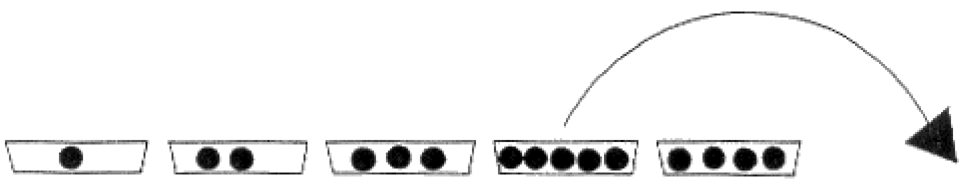
Wenn diese Zuordnungen sicher gelingen, können Sie folgende Aufgabe stellen:
Nehmen Sie eine einsortierte Tüte aus einer Schachtel und entnehmen Sie vor den Augen der Kinder ein Element oder fügen Sie ein Element hinzu. Fordern Sie das Kind auf, die Tüte wieder in eine passende Schachtel zu räumen. Lassen Sie das Kind seine Zuordnung begründen.
Ist die Klassenfolge bis zur Zahl 5 in dieser Weise handelnd aufgebaut, können z. B. Memoryspiele die Lernprozesse auf der Abbildebene gut unterstützen.



Zur Einsicht, dass alle Mengen mit gleicher Zahleigenschaft zu einer Klasse gehören, tritt eine weitere Einsicht:
Jede Klasse kann durch ein Symbol gekennzeichnet werden. Auf der konkret handelnden Ebene kann man den Schülerinnen und Schülern spielerisch die Notwendigkeit von Symbolen verdeutlichen, indem man sie bittet, sich genau und möglichst rasch zu erinnern, welche (Nuss-)Päckchen in welchem Karton stecken.



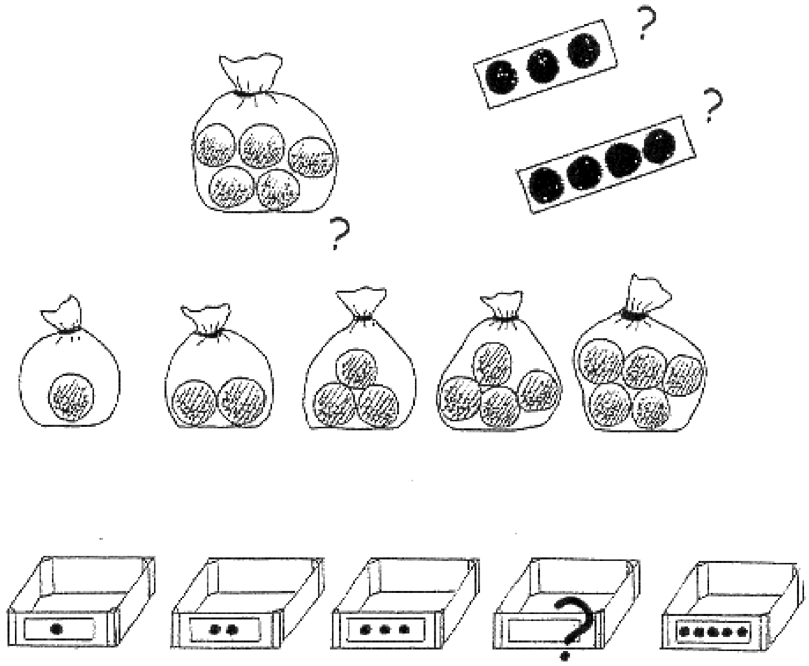
Da dies sicher nicht so leicht sein wird, kann man gemeinsam mit ihnen die Notwendigkeit von Symbolen erarbeiten. Zu den Mengen von ein bis fünf Elementen lassen sich die entsprechenden Punktsymbole für die Kartons finden, schließlich werden die Kartons in die „richtige Reihenfolge" gebracht.
„Dieser Karton kommt hierher, weil er einen Punkt mehr hat."
Mit Spielkärtchen (Mengen mit ein bis fünf Elementen und Punktkärtchen) können in Zuordnungsübungen die oben genannten Einsichten verfestigt und vertieft werden.



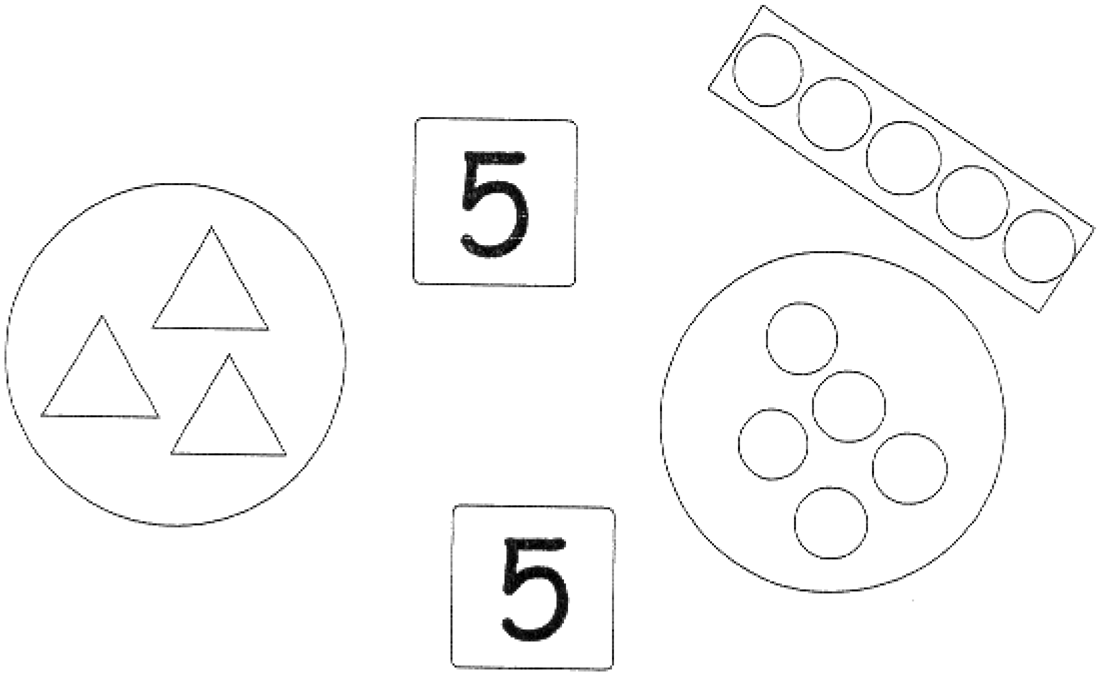
Besonders zu beachten ist, dass bei der Förderung der Einsichten in den Zusammenhang (zu jeder Klasse gehört ein bestimmtes Punktsymbol) bei den Spielen verschiedene Ausgangssituationen gewählt werden.

- auf welcher Kiste fehlt welches Schild (Punktsymbol)?
- zu welchem Punktsymbol gehört welche Menge (Beutel)?

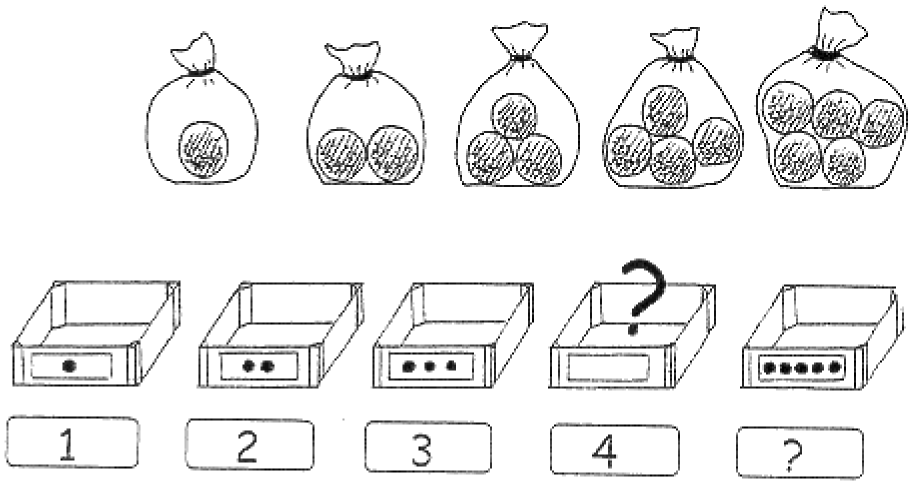
Beispiel: Der Kaufmann legt Apfelsinen in Kisten.



Wenn Kinder aufgefordert werden, Spielkärtchen und Mengenzeichen mit fünf und sechs Punkten schnell zu ordnen, merken sie, dass die Kärtchen schwer zu unterscheiden sind. Die Notwendigkeit neuer „Symbole" - die Zifferzeichen - wird einsichtig. In spielerischen Übungsformen werden Mengenzeichen und Ziffern gemeinsam dargestellt und entsprechend geordnet: „Was gehört zusammen?"



Beispiel: Der Kaufmann legt Apfelsinen in Kisten.

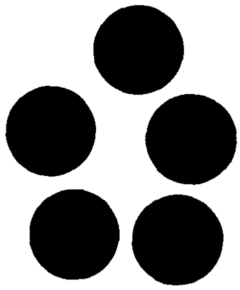


Ausgangspunkt dieser Übung sollen simultan erfassbare Mengen sein.

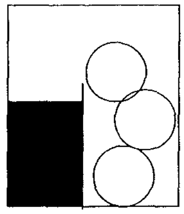
Angebot 6: Förderanregungen zu dem Bereich Mengenanalyse

Folgende Spiele bzw. Materialien haben sich zur Einzel- und Kleingruppenförderung bewährt:

Wendeplättchen werfen („würfeln")



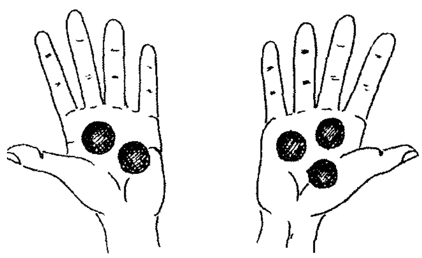
Schüttelbox



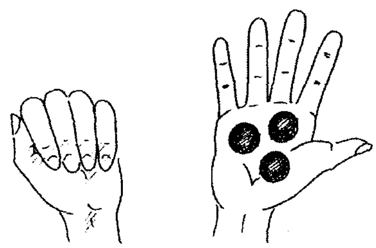
Handspiel

Besonders das Handspiel hat den großen Vorteil, dass das Niveau der Anforderungen im Spiel schnell gesteigert und wieder gesenkt werden kann, ganz auf die individuellen Schwierigkeiten des Kindes abgestimmt.

1. Stufe:
Darbietung beider Teilmengen



2. Stufe: (teilweise Vorstellung)
Darbietung einer Teilmenge, die zweite (verborgene) muss geschlossen werden



3. Stufe: (vollständige Vorstellung)
Lehrkraft nennt eine Teilmenge, Kind nennt die andere Teilmenge