Ministerium für Bildung,
Jugend und Sport
Land Brandenburg

Rahmenlehrplan

für den Unterricht in der
gymnasialen Oberstufe im
Land Brandenburg

Mathematik mit CAS

IMPRESSUM

Erarbeitung

Dieser Rahmenlehrplan wurde vom Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg (LISUM) erarbeitet. Er basiert auf den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012).

Herausgeber

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg

Gültigkeit des Rahmenlehrplans

Gültig ab 1. August 2014

Der Rahmenlehrplan ist ab dem Schuljahr 2014/2015 Grundlage für die Erarbeitung des schulinternen Curriculums. Er gilt für alle Schülerinnen und Schüler, die ab dem Schuljahr 2015/2016 in die Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe eintreten oder diese aus anderen Gründen beginnen.

Rahmenlehrplannummer

403003.14

1. Auflage 2014

Inhaltsverzeichnis

Rahmenlehrplan für die Qualifikationsphase

Einführungsphase an der Gesamtschule und am beruflichen Gymnasium

Zielsetzung

Im Unterricht der Einführungsphase vertiefen und erweitern die Schülerinnen und Schüler die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen und bereiten sich auf die Arbeit in der Qualifikationsphase vor. Spätestens am Ende der Einführungsphase erreichen sie die für ein erfolgreiches Lernen in der Qualifikationsphase notwendigen Voraussetzungen.

Die für die Qualifikationsphase beschriebenen Grundsätze für Unterricht und Erziehung sowie die Ausführungen zum Beitrag des Faches zum Kompetenzerwerb gelten für die Einführungsphase entsprechend. Die Schülerinnen und Schüler erhalten die Möglichkeit, Stärken weiterzuentwickeln und Defizite auszugleichen. Sie vertiefen bzw. erwerben fachbezogen und fachübergreifend Grundlagen für wissenschaftspropädeutisches Arbeiten und bewältigen zunehmend komplexe Aufgabenstellungen selbstständig. Hierzu gehören auch die angemessene Verwendung der Sprache und die Nutzung von funktionalen Lesestrategien. Dabei wenden sie fachliche und methodische Kenntnisse und Fertigkeiten mit wachsender Sicherheit selbstständig an.

Zur Vorbereitung auf die Arbeit im Kurs auf erhöhtem Anforderungsniveau erhalten sie individuelle Lernspielräume und werden von ihren Lehrkräften unterstützt und beraten. Notwendig ist darüber hinaus das Hinführen zur schriftlichen Bearbeitung umfangreicherer Aufgaben im Hinblick auf die Klausuren in der gymnasialen Oberstufe.

In der Einführungsphase kommen Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichen Kenntnissen und Fähigkeiten zusammen. Aufgabe des Unterrichts der Einführungsphase ist es, das im Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I formulierte Drei-Schlüssel-Niveau zu erreichen. Je nach Interessen und Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler werden fachspezifische Verfahren, Techniken und Strategien im Hinblick auf die Anforderungen des Kurses vertieft, indem z. B. binnendifferenziert gearbeitet und dabei die Herausbildung größerer Lernerautonomie gefördert wird.

1 Bildung und Erziehung in der Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe

1.1 Grundsätze

In der Qualifikationsphase erweitern und vertiefen die Schülerinnen und Schüler ihre bis dahin erworbenen Kompetenzen mit dem Ziel, sich auf die Anforderungen eines Hochschulstudiums oder einer beruflichen Ausbildung vorzubereiten. Sie handeln zunehmend selbstständig und übernehmen Verantwortung in gesellschaftlichen Gestaltungsprozessen. Die Grundlagen für das Zusammenleben und -arbeiten in einer demokratischen Gesellschaft und für das friedliche Zusammenleben der Völker sind ihnen vertraut. Die Lernenden erweitern ihre interkulturelle Kompetenz und bringen sich im Dialog und in der Kooperation mit Menschen unterschiedlicher kultureller Prägung aktiv und gestaltend ein. Eigene und gesellschaftliche Perspektiven werden von ihnen zunehmend sachgerecht eingeschätzt. Die Lernenden übernehmen Verantwortung für sich und ihre Mitmenschen, für die Gleichberechtigung der Menschen ungeachtet des Geschlechts, der Abstammung, der Sprache, der Herkunft, einer Behinderung, der religiösen und politischen Anschauungen, der sexuellen Identität und der wirtschaftlichen und gesellschaftlichen Stellung. Im Dialog zwischen den Generationen nehmen sie eine aktive Rolle ein. Sie setzen sich mit wissenschaftlichen, technischen, rechtlichen, politischen, sozialen und ökonomischen Entwicklungen auseinander, nutzen deren Möglichkeiten und schätzen Handlungsspielräume, Perspektiven und Folgen zunehmend sachgerecht ein. Sie gestalten Meinungsbildungsprozesse und Entscheidungen mit und eröffnen sich somit vielfältige Handlungsalternativen.

Kompetenzerwerb

Der beschleunigte Wandel einer von Globalisierung geprägten Welt erfordert ein dynamisches Modell des Kompetenzerwerbs, das auf lebenslanges Lernen und die Bewältigung vielfältiger Herausforderungen im Alltags- und Berufsleben ausgerichtet ist. Hierzu durchdringen die Schülerinnen und Schüler zentrale Zusammenhänge grundlegender Wissensbereiche, erkennen die Funktion und Bedeutung vielseitiger Erfahrungen und lernen, vorhandene sowie neu erworbene Fähigkeiten und Fertigkeiten miteinander zu verknüpfen. Die Lernenden entwickeln ihre Fähigkeiten im Umgang mit Sprache und Wissen weiter und setzen sie zunehmend situationsangemessen, zielorientiert und adressatengerecht ein.

Standardorientierung

Die Eingangsvoraussetzungen verdeutlichen den Stand der Kompetenzentwicklung, den die Lernenden beim Eintritt in die Qualifikationsphase erreicht haben sollten. Mit entsprechender Eigeninitiative und gezielter Förderung können auch Lernende die Qualifikationsphase erfolgreich absolvieren, die die Eingangsvoraussetzungen zu Beginn der Qualifikationsphase noch nicht im vollen Umfang erreicht haben.

Mit den abschlussorientierten Standards wird verdeutlicht, über welche fachlichen und überfachlichen Kompetenzen die Schülerinnen und Schüler im Abitur verfügen müssen. Die Standards bieten damit Lernenden und Lehrenden Orientierung für erfolgreiches Handeln und bilden einen wesentlichen Bezugspunkt für die Unterrichtsgestaltung, für das Entwickeln von Konzepten zur individuellen Förderung sowie für ergebnisorientierte Beratungsgespräche.

Themenfelder und Inhalte

Für die Kompetenzentwicklung sind zentrale Themenfelder und Inhalte von Relevanz, die sich auf die Kernbereiche der jeweiligen Fächer konzentrieren und sowohl fachspezifische als auch überfachliche Zielsetzungen deutlich werden lassen. So erhalten die Schülerinnen und Schüler Gelegenheit zum exemplarischen Lernen und zum Erwerb einer vertieften und erweiterten allgemeinen sowie wissenschaftspropädeutischen Bildung. Dabei wird stets der Bezug zur Erfahrungswelt der Lernenden und zu den Herausforderungen an die heutige sowie perspektivisch an die zukünftige Gesellschaft hergestellt.

Die Schülerinnen und Schüler entfalten anschlussfähiges und vernetztes Denken und Handeln als Grundlage für lebenslanges Lernen, wenn sie die in einem Lernprozess erworbenen Kompetenzen auf neue Lernbereiche übertragen und für eigene Ziele und Anforderungen in Schule, Studium, Beruf und Alltag nutzbar machen können.

Diesen Erfordernissen trägt das Kerncurriculum durch die Auswahl der Themenfelder und Inhalte Rechnung, bei der nicht nur die Systematik des Faches, sondern vor allem der Beitrag zum Kompetenzerwerb berücksichtigt werden.

Schulinternes Curriculum

Das Kerncurriculum ist die verbindliche Basis für die Gestaltung des schulinternen Curriculums, in dem der Bildungs- und Erziehungsauftrag von Schule standortspezifisch konkretisiert wird. Dazu werden fachbezogene, fachübergreifende und fächerverbindende Entwicklungsschwerpunkte sowie profilbildende Maßnahmen festgelegt.

Die Kooperation innerhalb der einzelnen Fachbereiche ist dabei von ebenso großer Bedeutung wie fachübergreifende Absprachen und Vereinbarungen. Beim Erstellen des schulinternen Curriculums werden regionale und schulspezifische Besonderheiten sowie die Neigungen und Interessenlagen der Lernenden einbezogen. Dabei arbeiten alle an der Schule Beteiligten zusammen und nutzen auch die Anregungen und Kooperationsangebote externer Partner.

Zusammen mit dem Kerncurriculum nutzt die Schule das schulinterne Curriculum als ein prozessorientiertes Steuerungsinstrument im Rahmen von Qualitätsentwicklung und Qualitätssicherung. Im schulinternen Curriculum werden überprüfbare Ziele formuliert, die die Grundlage für eine effektive Evaluation des Lernens und des Unterrichts in der Qualifikationsphase bilden.

1.2 Lernen und Unterricht

Mitverantwortung und Mitgestaltung von Unterricht

Lernen und Lehren in der Qualifikationsphase müssen dem besonderen Entwicklungsabschnitt Rechnung tragen, in dem die Jugendlichen zu jungen Erwachsenen werden. Dies geschieht vor allem dadurch, dass die Lernenden Verantwortung für den Lernprozess und den Lernerfolg übernehmen und sowohl den Unterricht als auch das eigene Lernen aktiv selbst gestalten.

Inklusives Lernen

Die Einhaltung der Grundsätze inklusiven Lernens ermöglicht allen Lernenden eine Teilhabe am Lernprozess – ungeachtet eventueller individueller Beeinträchtigungen.

Lernen als individueller Prozess

Beim Lernen konstruiert jede Einzelne/jeder Einzelne ein für sich selbst bedeutsames Abbild der Wirklichkeit auf der Grundlage ihres/seines individuellen Wissens und Könnens sowie ihrer/seiner Erfahrungen und Einstellungen.

Dieser Tatsache wird durch eine Lernkultur Rechnung getragen, in der sich die Schülerinnen und Schüler ihrer eigenen Lernwege bewusst werden, diese weiterentwickeln sowie unterschiedliche Lösungen reflektieren und selbstständig Entscheidungen treffen. So wird lebenslanges Lernen angebahnt und die Grundlage für motiviertes, durch Neugier und Interesse geprägtes Handeln ermöglicht. Fehler und Umwege werden dabei als bedeutsame Bestandteile von Erfahrungs- und Lernprozessen angesehen.

Phasen des Anwendens

Neben der Auseinandersetzung mit dem Neuen sind Phasen des Anwendens, des Übens, des Systematisierens sowie des Vertiefens und Festigens für erfolgreiches Lernen von großer Bedeutung. Solche Lernphasen ermöglichen auch die gemeinsame Suche nach Anwendungen für neu erworbenes Wissen und verlangen eine variantenreiche Gestaltung im Hinblick auf Übungssituationen, in denen vielfältige Methoden und Medien zum Einsatz gelangen.

Lernumgebung

Lernumgebungen werden so gestaltet, dass sie das selbst gesteuerte Lernen von Schülerinnen und Schülern fördern. Sie unterstützen durch den Einsatz von Medien sowie zeitgemäßer Kommunikations- und Informationstechnik sowohl die Differenzierung individueller Lernprozesse als auch das kooperative Lernen. Dies trifft sowohl auf die Nutzung von multimedialen und netzbasierten Lernarrangements als auch auf den produktiven Umgang mit Medien zu. Moderne Lernumgebungen ermöglichen es den Lernenden, eigene Lern- und Arbeitsziele zu formulieren und zu verwirklichen sowie eigene Arbeitsergebnisse auszuwerten und zu nutzen.

Gleichberechtigung von Mann und Frau

Die Integration geschlechtsspezifischer Perspektiven in den Unterricht fördert die Wahrnehmung und Stärkung der Lernenden mit ihrer Unterschiedlichkeit und Individualität. Sie unterstützt die Verwirklichung von gleichberechtigten Lebensperspektiven. Die Schülerinnen und Schüler werden bestärkt, unabhängig von tradierten Rollenfestlegungen Entscheidungen über ihre berufliche und persönliche Lebensplanung zu treffen.

Fachübergreifendes und fächerverbindendes Lernen

Durch fachübergreifendes Lernen werden Inhalte und Themenfelder in größerem Kontext erfasst, außerfachliche Bezüge hergestellt und gesellschaftlich relevante Aufgaben verdeutlicht. Die Vorbereitung und Durchführung von fächerverbindenden Unterrichtsvorhaben und Projekten fördern die Zusammenarbeit der Lehrkräfte und ermöglichen allen Beteiligten eine multiperspektivische Wahrnehmung.

Projektarbeit

Im Rahmen von Projekten, an deren Planung und Organisation sich die Schülerinnen und Schüler aktiv beteiligen, werden über Fächergrenzen hinaus Lernprozesse vollzogen und Lernprodukte erstellt. Dabei nutzen Lernende überfachliche Fähigkeiten und Fertigkeiten auch zum Dokumentieren und Präsentieren. Auf diese Weise bereiten sie sich auf das Studium und ihre spätere Berufstätigkeit vor.

Einbeziehung außerschulischer Erfahrungen

Außerhalb der Schule gesammelte Erfahrungen, Kenntnisse und erworbene Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler werden in die Unterrichtsarbeit einbezogen. Zur Vermittlung solcher Erfahrungen werden ebenso die Angebote außerschulischer Lernorte, kultureller oder wissenschaftlicher Einrichtungen sowie staatlicher und privater Institutionen genutzt. Die Teilnahme an Projekten und Wettbewerben, an Auslandsaufenthalten und internationalen Begegnungen hat ebenfalls eine wichtige Funktion; sie erweitert den Erfahrungshorizont der Schülerinnen und Schüler und trägt zur Stärkung ihrer interkulturellen Handlungsfähigkeit bei.

1.3 Leistungsfeststellung und Leistungsbewertung

Wichtig für die persönliche Entwicklung der Schülerinnen und Schüler ist eine individuelle Beratung, die die Stärken der Lernenden aufgreift und Lernergebnisse nutzt, um Lernfortschritte auf der Grundlage nachvollziehbarer Anforderungs- und Bewertungskriterien zu beschreiben und zu fördern.

So lernen die Schülerinnen und Schüler, ihre eigenen Stärken und Schwächen sowie die Qualität ihrer Leistungen realistisch einzuschätzen und kritische Rückmeldungen und Beratung als Chance für die persönliche Weiterentwicklung zu verstehen. Sie lernen außerdem, anderen Menschen faire und sachliche Rückmeldungen zu geben, die für eine produktive Zusammenarbeit und ein erfolgreiches Handeln unerlässlich sind.

Aufgabenstellungen

Die Anforderungen in Aufgabenstellungen orientieren sich im Verlauf der Qualifikationsphase zunehmend an der Vertiefung von Kompetenzen und den im Kerncurriculum beschriebenen abschlussorientierten Standards sowie an den Aufgabenformen und der Dauer der Abiturprüfung. Die Aufgabenstellungen sind so offen, dass sie von den Lernenden eine eigene Gestaltungsleistung abverlangen. Die von den Schülerinnen und Schülern geforderten Leistungen orientieren sich an lebens- und arbeitsweltbezogenen Textformaten und Aufgabenstellungen, die einen Beitrag zur Vorbereitung der Lernenden auf ihr Studium und ihre spätere berufliche Tätigkeit liefern.

Schriftliche Leistungen

Neben den Klausuren fördern umfangreichere schriftliche Arbeiten in besonderer Weise bewusstes methodisches Vorgehen und motivieren zu eigenständigem Lernen und Forschen.

Mündliche Leistungen

Auch den mündlichen Leistungen kommt eine große Bedeutung zu. In Gruppen und einzeln erhalten die Schülerinnen und Schüler Gelegenheit, ihre Fähigkeit zum reflektierten und sachlichen Diskurs und Vortrag und zum mediengestützten Präsentieren von Ergebnissen unter Beweis zu stellen.

Praktische Leistungen

Praktische Leistungen können in allen Fächern eigenständig oder im Zusammenhang mit mündlichen oder schriftlichen Leistungen erbracht werden. Die Schülerinnen und Schüler erhalten so die Gelegenheit, Lernprodukte selbstständig allein und in Gruppen herzustellen und wertvolle Erfahrungen zu sammeln.

2 Beitrag des Faches Mathematik zum Kompetenzerwerb

2.1 Fachprofil

Der Erwerb mathematischer Bildung in der Qualifikationsphase vollzieht sich mit drei Perspektiven:

– Die Schülerinnen und Schüler erwerben mathematische Kompetenzen, mit denen sie Probleme im Alltag und in ihrem zukünftigen Beruf bewältigen können, und erkennen die Rolle, die mathematisches Denken in der Welt spielt. Sie vertiefen dabei die in der Sekundarstufe I erworbene mathematische Bildung.
– Die Schülerinnen und Schüler erwerben mathematische Kompetenzen, die sie zu einem Hochschulstudium in einem mehr oder weniger mathematikintensiven Fach befähigen, erleben und erarbeiten dabei propädeutisch Strukturen und Prozesse wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens im Fach Mathematik.
– Die Schülerinnen und Schüler erwerben Kompetenzen, die sie dazu befähigen, zur Bearbeitung von mathematischen Problemstellungen **moderne Rechentechnik** (Computer-Algebra-Systeme [CAS], Computersoftware) sachgerecht und effektiv zu nutzen.

Mathematische Bildung muss sich daran messen lassen, inwieweit die bzw. der Einzelne in der Lage und bereit ist, diese Bildung für ein wirksames und verantwortliches Handeln einzusetzen. Zur mathematischen Bildung gehört somit auch die Fähigkeit, mathematische Fragestellungen im Alltag zu erkennen, mathematisches Wissen funktional, flexibel und mit Einsicht zur Bearbeitung vielfältiger innermathematischer und kontextbezogener Probleme einzusetzen und begründete mathematische Urteile abzugeben.

In diesem Sinne zeigt sich mathematische Bildung an einer Reihe von Kompetenzen, die sich auf Prozesse mathematischen Denkens und Arbeitens beziehen. Dies sind im Einzelnen die Kompetenz, die Wirklichkeit mit mathematischen Mitteln zu beschreiben (Modellieren), mathematisch fassbare Probleme zu strukturieren und erfolgreich zu bearbeiten (Problemlösen), schlüssige Begründungen zu suchen und sorgfältig zu prüfen (Argumentieren), mathematische Informationen und Argumente aufzunehmen und verständlich weiterzugeben (Kommunizieren) und gemeinsam an mathematischen Problemen zu arbeiten). Bei all diesen Tätigkeiten ist es unabdingbar, sich mathematischer (symbolischer und grafischer) Darstellungsweisen zu bedienen und Begriffe, mathematische Verfahren und Werkzeuge zu beherrschen.

Die genannten Kompetenzen bilden sich bei der aktiven Auseinandersetzung mit konkreten **Inhalten** und im Rahmen von konkreten Fragestellungen heraus. Diese sollen die zentralen Ideen des Faches Mathematik widerspiegeln. Solche zentralen Ideen haben sich in der Kulturgeschichte des Menschen in der über Jahrtausende währenden Auseinandersetzung mit Mathematik herausgebildet: Die Mathematik beschäftigt sich von Anfang an mit der Idee der Zahl und der Idee des räumlichen Strukturierens. Beide Ideen fließen zusammen in der Leitidee des Messens. Die Idee des Algorithmus gewinnt im Rahmen von Anwendungen in der Naturwissenschaft und Technik zunehmend an Bedeutung.

Ebenfalls herausgebildet haben sich in den letzten Jahrhunderten die Leitidee, den Zufall mit Mitteln der Mathematik zu erfassen und empirisch gewonnene Daten mit mathematischen Verfahren zu untersuchen sowie die Leitidee, funktionale Zusammenhänge in allen Bereichen der Mathematik mit einer gemeinsamen Sprache zu beschreiben.

Diese Leitideen sind Kristallisationspunkte der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragen und durchziehen und vernetzen alle Inhaltsbereiche. Sie dienen als strukturierende Elemente für die Beschreibung der vielfältigen, auf konkrete mathematische Inhalte bezogenen Kompetenzen, die die Schülerinnen und Schüler im allgemeinbildenden Mathematikunterricht erwerben sollen.

Mathematische Bildung zeigt sich erst im Zusammenspiel von Kompetenzen, die sich auf mathematische Prozesse beziehen, und solchen, die auf mathematische Inhalte ausgerichtet sind. Diese Kompetenzen sind miteinander verzahnt:

Allgemeine mathematische Kompetenzen werden bei der Beschäftigung mit konkreten Lerninhalten, also unter Nutzung inhaltsbezogener Kompetenzen, erworben und weiterentwickelt.

Inhaltsbezogene Kompetenzen wiederum werden durch problemlösende Auseinandersetzung mit inner- und außermathematischen Problemen und durch schlüssiges Argumentieren, also unter Nutzung allgemeiner mathematischer Kompetenzen, erworben. Der Mathematikunterricht fördert den Erwerb der beschriebenen Kompetenzen, indem er drei sich jeweils ergänzende Grunderfahrungen (nach H. Winter) von Mathematik ermöglicht:

- Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
- in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Im Sinne dieser drei Grunderfahrungen sollen die Schülerinnen und Schüler Mathematik als lebendiges, kulturelles und geistiges Produkt erleben, aber ebenso als aktiven Prozess der Auseinandersetzung mit gehaltvollen Problemen.

2.2 Fachbezogene Kompetenzen

Das Kompetenzmodell im Fach Mathematik hat folgende Struktur:

Allgemeine mathematische Kompetenzen	**Leitideen**
Mathematisch argumentieren [K1]	Algorithmus und Zahl [L1]
Probleme mathematisch lösen [K2]	Messen [L2]
Mathematisch modellieren [K3]	Raum und Form [L3]
Mathematische Darstellungen verwenden [K4]	Funktionaler Zusammenhang [L4]
Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen [K5]	Daten und Zufall [L5]
Mathematisch kommunizieren [K6]	

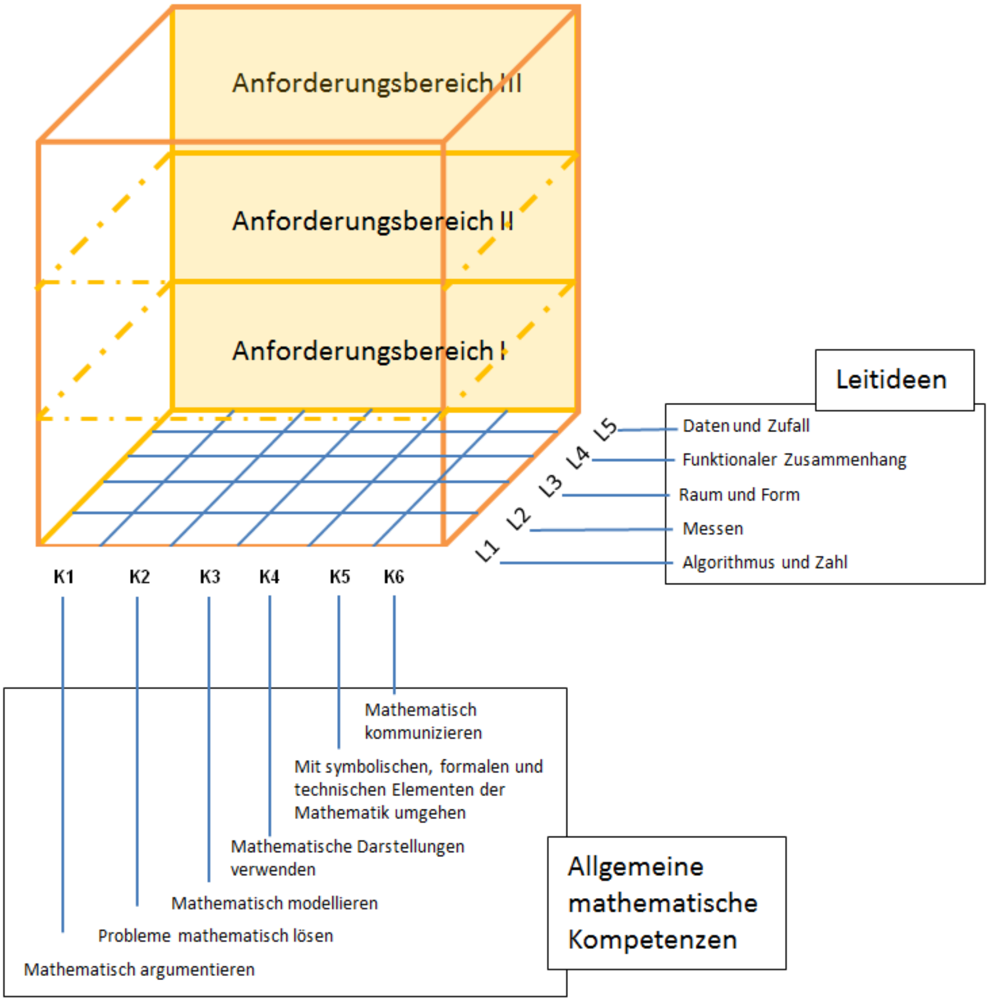

Abbildung: Kompetenzmodell der Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife

Der Erwerb der allgemeinen mathematischen Kompetenzen erfolgt nur durch eine aktive Ausseinandersetzung mit den Fachinhalten durch die Lernenden. Die drei Anforderungsbereiche beschreiben dabei unterschiedliche kognitive Ansprüche von kompetenzbezogenen mathematischen Aktivitäten. Allgemeine mathematische Kompetenzen und Leitideen sind untrennbar miteinander verknüpft, d.h. die allgemeinen mathematischen Kompetenzen manifestieren sich in jedem einzelnen mathematischen Inhalt (in der Abbildung angedeutet).

Die grafische Darstellung basiert auf den Bildungsstandards zum Erwerb der allgemeinen Hochschulreife und schließt an die Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss an.

Man wird erst dann vom hinreichenden Erwerb einer allgemeinen mathematischen Kompetenz sprechen, wenn diese an ganz unterschiedlichen Leitideen in allen drei Anforderungsbereichen erfolgreich eingesetzt werden kann.

Im Unterricht ist für den Erwerb der Kompetenzen auf eine Vernetzung der Inhalte der Mathematik untereinander mit anderen Fächern zu achten. Aufgaben mit Anwendungen aus der Lebenswelt und innermathematische haben die gleiche Wichtigkeit und Wertigkeit.

Der Unterricht in der gymnasialen Oberstufe im Land Brandburg im Fach Mathematik erfolgt auf erhöhtem Anforderungsniveau.

3 Eingangsvoraussetzungen und abschlussorientierte Standards

3.1 Eingangsvoraussetzungen

Für einen erfolgreichen Kompetenzerwerb in der Qualifikationsphase sollten die Schülerinnen und Schüler bereits zu Beginn der Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe bestimmte fachliche Anforderungen bewältigen können. Diese sind in den Eingangsvoraussetzungen dargestellt. Den Schülerinnen und Schülern ermöglichen sie, sich ihres Leistungsstandes zu vergewissern. Die Lehrkräfte nutzen sie für differenzierende Lernarrangements sowie zur individuellen Lernberatung.

Die Bundesländer haben in den Bildungsstandards für den mittleren Bildungsabschluss im Fach Mathematik festgelegt, welche Kompetenzen von den Schülerinnen und Schülern am Ende der Jahrgangsstufe 10 erwartet werden. Darüber hinaus sollen die Schülerinnen und Schüler, die in die Qualifikationsphase eintreten, weitere Kompetenzen besitzen, die in der folgenden Darstellung mit aufgenommen sind.

3.1.1 Eingangsvoraussetzungen bezüglich der allgemeinen mathematischen Kompetenzen

Mathematisch argumentieren [K1]

Die Schülerinnen und Schüler …

- erkunden mathematische Situationen und stellen Vermutungen auf,
- begründen die Plausibilität von Vermutungen oder widerlegen diese durch Angabe von Beispielen oder Gegenbeispielen,
- entwickeln ein- oder mehrschrittige, schlüssige Argumentationen zur Begründung mathematischer Aussagen,
- hinterfragen Argumentationen und Begründungen kritisch, finden und korrigieren Fehler.

Probleme mathematisch lösen [K2]

Die Schülerinnen und Schüler …

- untersuchen Muster und Beziehungen bei Zahlen und Figuren und finden mögliche mathematische Problemstellungen,
- geben inner- und außermathematische Problemstellungen in eigenen Worten wieder, strukturieren sie und entnehmen ihnen die relevanten Größen,
- vereinfachen Probleme, bilden und untersuchen Beispiele,
- finden und nutzen geeignete Darstellungen und Hilfsgrößen (z. B. Hilfslinien, Strukturierung des Lösungsweges, Variablen),
- verwenden heuristische Strategien (wie z. B. Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Zeichnen einer informativen Figur, Zurückführen auf Bekanntes),
- reflektieren Lösungswege und überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen.

Mathematisch modellieren [K3]

Die Schülerinnen und Schüler …

- strukturieren und reduzieren den Komplexitätsgrad von Realsituationen, sodass diese mathematisch zugänglich wird, und reflektieren die Vereinfachungen,
- beschreiben reale Situationen mit mathematischen Modellen (Terme, Funktionen, Figuren, Diagramme, Graphen, Zufallsversuche u. a.),
- interpretieren und prüfen Ergebnisse einer Modellierung,
- überprüfen Modelle auf ihre Gültigkeit oder Grenzen und verwerfen oder verbessern sie gegebenenfalls,
- geben zu einem mathematischen Modell verschiedene Realsituationen, die es beschreibt, an.

Mathematische Darstellungen verwenden [K4]

Die Schülerinnen und Schüler …

- interpretieren verschiedene mathematische Darstellungen (verbale, nummerische, grafische und symbolische),
- wählen je nach Situation und Zweck geeignete Darstellungsformen aus oder übersetzen zwischen ihnen,
- erkennen Beziehungen und reflektieren Unterschiede zwischen ihnen.

Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen [K5]

Die Schülerinnen und Schüler …

- verwenden Variablen, Terme, Gleichungen zum Strukturieren von Information, zum Modellieren und zum Problemlösen und Übersetzen zwischen symbolischer und natürlicher Sprache,
- führen algorithmische Verfahren aus, reflektieren deren Anwendung und überprüfen die Ergebnisse,
- setzen mathematische Hilfsmittel und Werkzeuge (wie Formelsammlungen, Taschenrechner, Dynamische Geometriesoftware, Tabellenkalkulation und CAS) zur Darstellung und beim Problemlösen ein.

Mathematisch kommunizieren [K6]

Die Schülerinnen und Schüler …

- erfassen und reflektieren mathematische Informationen in mathematikhaltigen Darstellungen und in nicht aufbereiteten, authentischen Texten (z. B. aus Zeitungen),
- stellen Zusammenhänge adressatengerecht mit eigenen Worten dar und präzisieren sie mit geeigneten Fachbegriffen,
- erläutern eigene Problembearbeitungen und Einsichten sowie mathematische Prozesse,
- dokumentieren Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse, stellen diese verständlich dar und präsentieren sie auch unter Nutzung geeigneter Medien,
- organisieren die gemeinsame Arbeit an mathematischen Problemen.

3.1.2 Eingangsvoraussetzungen bezüglich inhaltsbezogener Kompetenzen (Leitideen)

$1/2$ Algorithmus und Zahl [L1]

Die Schülerinnen und Schüler …

- stellen Zahlen der Situation angemessen als Brüche, Dezimalzahlen, Prozentzahlen und in Zehnerpotenzschreibweise dar, runden Dezimalzahlen sachgerecht und verwenden Darstellungen irrationaler Anteile (z.B. $5\pi,\ 3\cdot\sqrt{7}$),
- verwenden natürliche, ganze, gebrochene und reelle Zahlen zur Darstellung mathematischer Situationen und wenden diese zur Lösung von Problemen an,
- führen Rechnungen und Überschlagsrechnungen im Kopf durch und nutzen Rechengesetze zum vorteilhaften Rechnen,
- erläutern und reflektieren die Verwendung von negativen Zahlen und die Eigenschaften von irrationalen Zahlen an Beispielen,
- beschreiben und reflektieren ein Verfahren zur Einschachtelung einer irrationalen Zahl (z.B. $\sqrt{2}$ oder π),
- lösen Potenz- und Wurzelgleichungen unter Nutzung der entsprechenden Gesetze,
- lösen lineare (2,2)- und (3,3)-Gleichungssysteme.

Messen [L2]

Die Schülerinnen und Schüler …

- messen Strecken und Winkel,
- berechnen Flächeninhalt und Umfang von zusammengesetzten Figuren, Volumen und Oberfläche von Prismen, Pyramiden, Kegeln und Kugeln sowie von zusammengesetzten Körpern,
- bestimmen Flächeninhalt und Umfang von krummlinig begrenzten Figuren näherungsweise durch Vergleich mit geometrischen Grundfiguren,
- bestimmen und deuten mittlere Änderungsraten in Tabellen und Graphen sowie lokale Änderungsraten zeichnerisch,
- beschreiben und interpretieren qualitativ das Änderungsverhalten eines Funktionsgraphen durch eine Skizze des Graphen der zugehörigen lokalen Änderungsrate und begründen den Verlauf,
- bestimmen Steigungen von beliebigen Funktionsgraphen zeichnerisch.

Raum und Form [L3]

Die Schülerinnen und Schüler …

- klassifizieren geometrische Objekte unter Verwendung von Ober- und Unterbegriffen und den definierenden Eigenschaften,
- berechnen Größen und begründen Eigenschaften von Figuren mithilfe von Symmetrie, einfachen Winkelsätzen, Kongruenz, Ähnlichkeit, trigonometrischen Beziehungen, dem Satz des Thales und dem Satz des Pythagoras,
- nutzen das Prinzip von Cavalieri (Scherung), um Flächen- und Volumenformeln zu begründen.

Funktionaler Zusammenhang [L4]

Die Schülerinnen und Schüler …

- wechseln zwischen unterschiedlichen Darstellungen quadratischer Funktionen, u.a. als Produkt von Linearfaktoren,
- charakterisieren und interpretieren die Verläufe der Funktionen $f(x)= \sin x$, $f(x)= \cos x$, $f(x)=a^x$, $f(x)= \log_a x$ und beschreiben Anwendungssituationen für diese Funktionen,
- beschreiben qualitativ das Änderungsverhalten eines Funktionsgraphen durch eine Skizze der Änderungsfunktion und begründen den Verlauf,
- verwenden Winkelmaße in Grad- und Bogenmaß und interpretieren diese auch über den Vollwinkel hinaus,
- geben zeichnerisch und rechnerisch Umkehrfunktionen zu linearen, quadratischen, Potenz- und Exponentialfunktionen an und beschreiben damit reale Situationen,
- identifizieren proportionale, umgekehrt proportionale, lineare und quadratische Zusammenhänge in tabellarischer, grafischer und symbolischer Darstellung, wechseln zwischen den Darstellungsformen und verwenden sie zur Lösung von Anwendungsproblemen,
- verwenden Prozentdarstellungen, Potenzen, Wurzeln und Logarithmen zur Lösung inner- und außermathematischer Probleme,
- bestimmen charakteristische Punkte (z.B. Achsenschnittpunkte, Hochpunkte, Tiefpunkte, Wendepunkte) aus Funktionsgraphen ganzrationaler Funktionen und deuten sie in Sachzusammenhängen.

Daten und Zufall [L5]

Die Schülerinnen und Schüler …

- planen statistische Erhebungen, nutzen Methoden der Erfassung und Darstellung von Daten (Säulen- und Kreisdiagramme) und bewerten Darstellungen kritisch,
- bestimmen relative Häufigkeiten, Mittelwerte (arithmetisches Mittel, Median, Modalwert) sowie Streumaße (z.B. Spannweite) und interpretieren diese,
- wenden das empirische Gesetz der großen Zahlen an,
- bestimmen Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Laplace-Regel, Baumdiagrammen sowie Pfadregeln und wenden diese an,
- nutzen Häufigkeiten zum Schätzen von Wahrscheinlichkeiten und Wahrscheinlichkeiten zur Vorhersage von Häufigkeiten,
- nutzen Binomialkoeffizienten und Fakultäten zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in Anwendungskontexten.

3.2 Abschlussorientierte Standards

3.2.1 Standards zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen

Für das Fach Mathematik werden auch in den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife sechs allgemeine mathematische Kompetenzen unterschieden, die das Spektrum mathematischen Arbeitens in der Sekundarstufe II in hinreichender Breite erfassen. Es ist charakteristisch, dass mehrere dieser Kompetenzen im Verbund benötigt werden. Eine scharfe Abgrenzung der einzelnen Kompetenzen ist nicht möglich.

Im Folgenden werden die sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen näher beschrieben, insbesondere auch durch ihre jeweiligen Ausprägungen in den drei Anforderungsbereichen. Diese Kompetenzen sind immer untrennbar mit den – in den Leitideen konkretisierten – mathematischen Inhalten verbunden.

Die folgenden Standards sind aus den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife übernommen.

Mathematisch argumentieren [K1]

Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entwickeln eigenständiger, situationsangemessener mathematischer Argumentationen und Vermutungen als auch das Verstehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen. Das Spektrum reicht dabei von einfachen Plausibilitätsargumenten über inhaltlich-anschauliche Begründungen bis zu formalen Beweisen. Typische Formulierungen, die auf die Kompetenz des Argumentierens hinweisen, sind beispielsweise „Begründen Sie!“, „Widerlegen Sie!“, „Gibt es?“ oder „Gilt das immer?“.

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

Anforderungsbereich I: Die Schülerinnen und Schüler können …

- Routineargumentationen (bekannte Sätze, Verfahren, Herleitungen usw.) wiedergeben und anwenden,
- einfache rechnerische Begründungen geben oder einfache logische Schlussfolgerungen ziehen,
- Argumentationen auf der Basis von Alltagswissen führen.

Anforderungsbereich II: Die Schülerinnen und Schüler können …

- überschaubare mehrschrittige Argumentationen und logische Schlüsse nachvollziehen, erläutern oder entwickeln.

Anforderungsbereich III: Die Schülerinnen und Schüler können …

- Beweise erläutern oder entwickeln, anspruchsvolle Argumentationen nutzen oder entwickeln,
- verschiedene Argumente nach Kriterien wie Reichweite und Schlüssigkeit bewerten.

Probleme mathematisch lösen [K2]

Diese Kompetenz beinhaltet, ausgehend vom Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme, das Auswählen geeigneter Lösungsstrategien sowie das Finden und das Ausführen geeigneter Lösungswege. Das Spektrum reicht von der Anwendung bekannter bis zur Konstruktion komplexer und neuartiger Strategien. Heuristische Prinzipien, wie z. B. „Skizze anfertigen", „systematisch probieren", „zerlegen und ergänzen", „Symmetrien verwenden", „Extremalprinzip", „Invarianten finden" sowie „vorwärts und rückwärts arbeiten", werden gezielt ausgewählt und angewendet.

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

Anforderungsbereich I: Die Schülerinnen und Schüler können …

– einen Lösungsweg einer einfachen mathematischen Aufgabe durch Identifikation und Auswahl einer naheliegenden Strategie, z. B. durch Analogiebetrachtung, finden.

Anforderungsbereich II: Die Schülerinnen und Schüler können …

– einen Lösungsweg zu einer Problemstellung, z. B. durch ein mehrschrittiges, strategiegestütztes Vorgehen, finden.

Anforderungsbereich III: Die Schülerinnen und Schüler können …

– eine Strategie zur Lösung eines komplexeren Problems, z. B. zur Verallgemeinerung einer Schlussfolgerung, durch Anwenden mehrerer Heurismen oder zur Beurteilung verschiedener Lösungswege, entwickeln und anwenden.

Mathematisch modellieren [K3]

Hier geht es um den Wechsel zwischen Realsituationen und mathematischen Begriffen, Resultaten oder Methoden. Hierzu gehört sowohl das Konstruieren passender mathematischer Modelle als auch das Verstehen oder Bewerten vorgegebener Modelle.
Typische Teilschritte des Modellierens sind das Strukturieren und Vereinfachen gegebener Realsituationen, das Übersetzen realer Gegebenheiten in mathematische Modelle, das Interpretieren mathematischer Ergebnisse in Bezug auf Realsituationen und das Überprüfen von Ergebnissen im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit bezogen auf die Realsituation. Das Spektrum reicht von Standardmodellen (z. B. bei linearen Zusammenhängen) bis zu komplexen Modellierungen.

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

Anforderungsbereich I: Die Schülerinnen und Schüler können …

– vertraute und direkt erkennbare Modelle anwenden,
– eine Realsituation direkt in ein mathematisches Modell überführen,
– ein mathematisches Resultat auf eine gegebene Realsituation übertragen.

Anforderungsbereich II: Die Schülerinnen und Schüler können …

– mehrschrittige Modellierungen mit wenigen und klar formulierten Einschränkungen vornehmen,
– Ergebnisse einer solchen Modellierung interpretieren,
– ein mathematisches Modell an veränderte Umstände anpassen

Anforderungsbereich III: Die Schülerinnen und Schüler können …

– eine komplexe Realsituation modellieren, wobei Variablen und Bedingungen festgelegt werden müssen,
– mathematische Modelle im Kontext einer Realsituation überprüfen, vergleichen und bewerten.

Mathematische Darstellungen verwenden [K4]

Diese Kompetenz umfasst das Auswählen geeigneter Darstellungsformen, das Erzeugen mathematischer Darstellungen und das Umgehen mit gegebenen Darstellungen. Hierzu zählen Diagramme, Graphen und Tabellen ebenso wie Formeln. Das Spektrum reicht von Standarddarstellungen – wie Wertetabellen – bis zu eigenen Darstellungen, die dem Strukturieren und Dokumentieren individueller Überlegungen dienen und die Argumentation und das Problemlösen unterstützen.

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

Anforderungsbereich I: Die Schülerinnen und Schüler können …

- Standarddarstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen und nutzen.

Anforderungsbereich II: Die Schülerinnen und Schüler können …

- gegebene Darstellungen verständig interpretieren oder verändern,
- zwischen verschiedenen Darstellungen wechseln.

Anforderungsbereich III: Die Schülerinnen und Schüler können …

- mit unvertrauten Darstellungen und Darstellungsformen sachgerecht und verständig umgehen,
- eigene Darstellungen problemadäquat entwickeln,
- verschiedene Darstellungen und Darstellungsformen zweckgerichtet beurteilen.

x+y Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen [K5]

Diese Kompetenz beinhaltet in erster Linie das Ausführen von Operationen mit mathematischen Objekten wie Zahlen, Größen, Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen sowie Vektoren und geometrischen Objekten. Das Spektrum reicht hier von einfachen und überschaubaren Routineverfahren bis hin zu komplexen Verfahren einschließlich deren reflektierender Bewertung. Diese Kompetenz beinhaltet auch Faktenwissen und grundlegendes Regelwissen für ein zielgerichtetes und effizientes Bearbeiten von mathematischen Aufgabenstellungen, auch mit eingeführten Hilfsmitteln und digitalen Mathematikwerkzeugen.

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

Anforderungsbereich I: Die Schülerinnen und Schüler können …

- elementare Lösungsverfahren verwenden,
- Formeln und Symbole direkt anwenden,
- mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge direkt nutzen.

Anforderungsbereich II: Die Schülerinnen und Schüler können …

- formale mathematische Verfahren anwenden,
- mit mathematischen Objekten im Kontext umgehen,
- mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge je nach Situation und Zweck gezielt auswählen und effizient einsetzen.

Anforderungsbereich III: Die Schülerinnen und Schüler können …

- komplexe Verfahren durchführen,
- verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren bewerten,
- die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Verfahren, Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge reflektieren.

Mathematisch kommunizieren [K6]

Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entnehmen von Informationen aus schriftlichen Texten, mündlichen Äußerungen oder sonstigen Quellen als auch das Darlegen von Überlegungen und Resultaten unter Verwendung einer angemessenen Fachsprache. Das Spektrum reicht von der direkten Informationsentnahme aus Texten des Alltagsgebrauchs bzw. vom Aufschreiben einfacher Lösungswege bis hin zum sinnentnehmenden Erfassen fachsprachlicher Texte bzw. zur strukturierten Darlegung oder Präsentation eigener Überlegungen. Sprachliche Anforderungen spielen bei dieser Kompetenz eine besondere Rolle.

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

Anforderungsbereich I: Die Schülerinnen und Schüler können …

- einfache mathematische Sachverhalte darlegen,
- Informationen aus kurzen Texten mit mathematischem Gehalt identifizieren und auswählen, wobei die Ordnung der Informationen im Text die Schritte der mathematischen Bearbeitung nahelegt.

Anforderungsbereich II: Die Schülerinnen und Schüler können …

- mehrschrittige Lösungswege, Überlegungen und Ergebnisse verständlich darlegen,
- Äußerungen (auch fehlerhafte) anderer Personen zu mathematischen Aussagen interpretieren,
- mathematische Informationen aus Texten identifizieren und auswählen, wobei die Ordnung der Informationen nicht unmittelbar den Schritten der mathematischen Bearbeitung entsprechen muss.

Anforderungsbereich III: Die Schülerinnen und Schüler können …

- eine komplexe mathematische Lösung oder Argumentation widerspruchsfrei und vollständig darlegen oder präsentieren,
- mathematische Fachtexte sinnentnehmend erfassen,
- mündliche und schriftliche Äußerungen mit mathematischen Gehalt von anderen Personen miteinander vergleichen, sie bewerten und ggf. korrigieren.

3.2.2. Standards zu den inhaltsbezogenen Kompetenzen (Leitideen)

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife beschreiben den Zusammenhang zwischen Leitideen und Anforderungsbereiche folgendermaßen:

„Die Bewältigung mathematischer Problemsituationen erfordert das permanente Zusammenspiel von prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen. Insofern sind die folgenden – in der Sekundarstufe II verbindlichen – Inhalte immer im Kontext allgemeiner mathematischer Kompetenzen und deren Anforderungsbereichen zu sehen. Unter „Inhalten" werden dabei insbesondere auch adäquate Grundvorstellungen verstanden, die ein Verständnis dieser Inhalte erst konstituieren. Die inhaltsbezogenen Kompetenzen werden jeweils übergreifenden Leitideen zugeordnet, die nicht auf bestimmte klassische mathematische Themenbereiche (Analysis, Lineare Algebra & Analytische Geometrie, Stochastik) begrenzt sind. Die Leitideen tragen damit zur Vernetzung dieser traditionellen klassischen Sachgebiete bei".

Bei allen Leitideen der Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife wird zuerst ein inhaltlicher Kernbereich beschrieben, der das grundlegende Anforderungsniveau charakterisiert. Danach werden die zusätzlichen Inhalte für das erhöhte Anforderungsniveau aufgeführt." (vgl. dazu auch die Ausführungen in Kap. 2.2)

Die Zuordnung der Kurshalbjahre (Khj) erfasst die schwerpunktmäßige Behandlung des genannten Standards. Insbesondere dient Q4 der Vertiefung und Verknüpfung der bis dahin erworbenen Kompetenzen. Aufgrund unterschiedlicher Semesterlängen sind Verschiebungen zwischen Q1 und Q2 und zwischen Q2 und Q4 zulässig.

<table>
<tr><td colspan="2">$\boxed{1/2}$ Algorithmus und Zahl [L1]</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diese Leitidee verallgemeinert zum einen den Zahlbegriff der Sekundarstufe I zu Tupeln einschließlich zugehöriger Operationen. Die Leitidee erweitert zum anderen die Vorstellungen von den reellen Zahlen durch Approximationen mittels infinitesimaler Methoden. Weiter umfasst die Leitidee die Kenntnis, das Verstehen und das Anwenden mathematischer Verfahren, die prinzipiell automatisierbar und damit einer Rechnernutzung zugänglich sind.

Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind die Anfänge der Analysis und die Lineare Algebra.</td></tr>
<tr><td>Erhöhtes Anforderungsniveau</td><td>Khj</td></tr>
<tr><td>Die Schülerinnen und Schüler können …</td><td></td></tr>
<tr><td>- Grenzwerte (von Zahlenfolgen und Funktionen) auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen,</td><td>Q1/2</td></tr>
<tr><td>- geeignete Verfahren zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen auswählen auch unter Nutzung digitaler Hilfsmittel (CAS),</td><td>Q1/3</td></tr>
<tr><td>- ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme erläutern und es anwenden,</td><td>Q3</td></tr>
<tr><td>- einfache Sachverhalte mit Tupeln (Listen, Vektoren) oder Matrizen (Koeffizientenmatrizen, Tabellen) beschreiben.</td><td>Q3</td></tr>
</table>

Messen [L2]

Diese Leitidee erweitert das Bestimmen und Deuten von Größen aus der Sekundarstufe I um infinitesimale, nummerische und analytisch-geometrische Methoden. Dies betrifft sowohl funktionale Größen wie Änderungsraten und (re-)konstruierte Bestände als auch Größen im Koordinatensystem wie Winkel, Längen, Flächeninhalte und Volumina. Weiter umfasst die Leitidee stochastische Kenngrößen, die als Ergebnisse von Messprozessen im weiteren Sinne aufgefasst werden.

Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind die *Analysis*, die *Analytische Geometrie* und die *Stochastik*.

Erhöhtes Anforderungsniveau	Khj
Die Schülerinnen und Schüler können …	
- Sekanten- und Tangentensteigungen an Funktionsgraphen bestimmen,	Q1
- Änderungsraten berechnen und deuten,	Q1
- Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand berechnen,	Q2
- Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen (von Potenzfunktionen *f* mit $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, ganzrationalen und Exponentialfunktionen) begrenzt sind, mithilfe bestimmter Integrale bestimmen,	Q2
- Lage- und Streumaße einer Stichprobe bestimmen und deuten,	Q2
- Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen (am Beispiel der Binomialverteilung) bestimmen und deuten,	Sek I
- Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen bestimmen und deuten,	Q4
- Streckenlängen und Winkelgrößen im Raum (auch mithilfe des Skalarprodukts) bestimmen,	Q3
- Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen,	Q3
- das Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die Abszissenachse entstehen.	Q4

Raum und Form [L3]

Diese Leitidee ist auf die Weiterentwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens aus der Sekundarstufe I gerichtet. Sie beinhaltet den Umgang mit Objekten im Raum. Es geht hier sowohl um Eigenschaften und Beziehungen dieser Objekte als auch um Darstellungen mit geeigneten Hilfsmitteln einschließlich Geometriesoftware.

Das zugehörige mathematische Sachgebiet der Sekundarstufe II ist die *Analytische Geometrie*.

Erhöhtes Anforderungsniveau	Khj
Die Schülerinnen und Schüler können …	
- geometrische Sachverhalte in Ebene und Raum koordinatisieren (geometrische Interpretation von Gleichungssystemen und ihrer Lösungen) und im Koordinatensystem darstellen,	Q3
- elementare Operationen mit geometrischen Vektoren ausführen und Vektoren auf Kollinearität untersuchen,	Q3
- Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig bzw. ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten anwenden,	Q3
- das Skalarprodukt geometrisch deuten,	Q3
- Geraden und Ebenen (durch Parameter-,Koordinaten- und Normalenform) analytisch beschreiben und die Lagebeziehungen von Geraden (qualitativ) untersuchen (vgl. L2).	Q3
- die Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen (auch Scharen) untersuchen.	Q3

Funktionaler Zusammenhang [L4]

Diese Leitidee ist darauf gerichtet, die funktionalen Vorstellungen aus der Sekundarstufe I mit Begriffen und Verfahren der elementaren Analysis zu vertiefen und den Funktionsbegriff durch vielfältige Beispiele zu erweitern, auch in stochastischen Kontexten. Es geht hier um funktionale Beziehungen zwischen Zahlen bzw. Größen sowie deren Darstellungen und Eigenschaften, auch unter Nutzung infinitesimaler Methoden und geeigneter Software.

Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe II sind in erster Linie die *Analysis* und die *Stochastik*.

Erhöhtes Anforderungsniveau	Khj
Die Schülerinnen und Schüler können …	
- Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale und Exponentialfunktionen, sowie ln-, sin-, cos- und Wurzelfunktionen zur Beschreibung und Untersuchung quantifizierbarer Zusammenhänge (z.B. in Fragestellungen zu Sachsituationen, die auf die Rekonstruktion von Funktionsgleichungen, Extremalproblemen etc. führen)nutzen,	Q1/2
- in einfachen Fällen Verknüpfungen (additiv und multiplikativ) und Verkettungen von Funktionen (ganzrationale Funktion, Exponentialfunktion) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen,	Q1
- die Ableitung insbesondere als lokale Änderungsrate deuten,	Q1
- Änderungsraten funktional beschreiben (Ableitungsfunktion) und interpretieren,	Q1
- Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten, ganzrationale und Expontialfunktionen, sowie ln-, sin-, cos und Wurzelfunktionen ableiten, auch unter Verwendung der Konstanten-, Potenz-, Faktor- und Summenregel,	Q1
- die Produktregel und die Kettenregel (mit linearer bzw. quadratischer innerer Funktion) zum Ableiten von Funktionen verwenden,	Q1
- die Ableitung zur Bestimmung von Monotonie, Extrema und Wendepunkte (notwendige Bedingung und inhaltliche Begründungen für die Existenz) von Funktionen nutzen,	Q1
- den Ableitungsgraphen aus dem Funktionsgraphen entwickeln und umgekehrt,	Q1/2
- das bestimmte Integral deuten, insbesondere als (re-) konstruierten Bestand,	Q2
- geometrisch anschaulich den Hauptsatz als Beziehung zwischen Ableiten und Integrieren begründen,	Q2
- Integrale von Funktionen (Potenzfunktionen *f* mit $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, ganzrationalen und Exponentialfunktionen) mittels Stammfunktionen bestimmen,	Q2
- in einfachen Fällen Verknüpfungen und Verkettungen (zwei Funktionsklassen) sowie Scharen von Funktionen (zwei Funktionsklassen) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen,	Q1
- die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen deuten,	Q1
- Ableitung zur Bestimmung von Extrema und Wendepunkten (notwendige und hinreichende Bedingung) von Funktionen nutzen,	Q1
- die ln-Funktion als Stammfunktion von $x \to \frac{1}{x}$ und als Umkehrfunktion der e-Funktion nutzen,	Q2
- Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Beschreibung stochastischer Situationen nutzen (Binomial- und Normalverteilung).	Q2/4

Daten und Zufall [L5]]

Diese Leitidee vernetzt Begriffe und Methoden zur Aufbereitung und Interpretation von statistischen Daten mit solchen zur Beschreibung und Modellierung von zufallsabhängigen Situationen. In Ausweitung und Vertiefung stochastischer Vorstellungen der Sekundarstufe I umfasst diese Leitidee insbesondere den Umgang mit mehrstufigen Zufallsexperimenten, die Untersuchung und Nutzung von Verteilungen sowie einen Einblick in Methoden der beurteilenden Statistik, auch mithilfe von Simulationen und unter Verwendung einschlägiger Software.

Das darauf bezogene mathematische Sachgebiet der Sekundarstufe II ist die *Stochastik*.

Erhöhtes Anforderungsniveau	Khj
Die Schülerinnen und Schüler können …	
- exemplarisch statistische Erhebungen planen und auswerten,	Q2
- Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln (unter Verwendung der Grundbegriffe der Mengenlehre) untersuchen und damit Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten lösen,	Q2
- Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit anhand einfacher Beispiele untersuchen,	Q2
- Anwendungssituationen mit Hilfe von Urnenmodellen (mit und ohne Zurücklegen) untersuchen,	Q2
- die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen (n, p) nutzen und mithilfe von CAS berechnen,	Q2
- Simulationen auch unter Nutzung von CAS zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden,	Q2
- in einfachen Fällen aufgrund von Stichproben auf die Gesamtheit schließen (k-σ-Intervalle, Signifikanzbegriff).	Q2
- Hypothesentests (bei Binomialverteilung) interpretieren und die Unsicherheit (Fehler 1. und 2. Art) der Ergebnisse begründen,	Q4
- exemplarisch diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden und die „Glockenform“ als Grundvorstellung von normalverteilten Zufallsgrößen nutzen,	Q4
- stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen.	Q4

4 Kompetenzentwicklung und Inhalte in den Kurshalbjahren

Jedes Kurshalbjahr ist auf den Kompetenzerwerb der Schülerinnen und Schüler und auf das Erreichen der abschlussorientierten Standards auszurichten. Für die inhaltliche Planung sind die Ausführungen, die in den „Abschlussorientierten Standards“ (siehe Kapitel 3.2) dargestellt sind, maßgeblich.

1. Kurshalbjahr (Q1):	**Analysis (Differentialrechnung)**
2. Kurshalbjahr (Q2):	**Analysis (Integralrechnung)** **Stochastik (Wahrscheinlichkeitsrechnung)**
3. Kurshalbjahr (Q3):	**Analytische Geometrie**
4. Kurshalbjahr (Q4):	**Analysis** **Stochastik** **komplexe Aufgabenstellungen aus allen drei Sachgebieten**

Analysis (Differentialrechnung) (Q1/Q4)

Die Grundbegriffe der Differentialrechnung entfalten sich bei der Arbeit mit konkreten Anwendungssituationen, in denen das Erfassen und Beschreiben von Veränderungen bei funktionalen Zusammenhängen im Mittelpunkt stehen. Als Untersuchungsgegenstände eignen sich nummerisch gegebene, diskrete Prozesse (z.B. Messreihen eines Beschleunigungsvorganges), grafisch repräsentierte, qualitative Prozesse (z.B. Wasserstand in einem Staubecken) oder auch symbolisch erfasste Prozesse (z.B. exponentielles Wachstum). Zentral ist dabei das Ziel, die mittlere und die lokale Änderungsrate als Größe numerisch zu erfassen. Dabei dient der Einsatz von Computeralgebra, durch die Verfügbarkeit von symbolischer und grafischer Darstellung, dazu, Zusammenhänge zwischen Größen zu visualisieren, kriteriengeleitet zu untersuchen und hinsichtlich bestimmter Aspekte zu klassifizieren. In der zusätzlichen Verbindung und Interaktivität mit Tabellenkalkulation können die Vor- und Nachteile der verschiedenen mathematischen Darstellungsweisen verglichen und in ihrer Wechselwirkung vertiefend durchdrungen werden. So kann die Bedeutung verschiedener Parameter des Funktionsterms sowohl grafisch als auch tabellarisch und im Sachkontext analysiert werden. („Wie verändert sich der Graph bei Variation des Terms und umgekehrt?“) Die Untersuchung kann sowohl an statischen Bildern (z.B. von Scharen) als auch dynamisch erfolgen (Animationen, Schieberegler).

Die Orientierung an Realsituationen bleibt durchgehendes Prinzip und liefert die Basis für ein breites Feld mathematischer Prozesse. So haben die Schülerinnen und Schüler bei der Arbeit mit Funktionen als konkreten Modellen zur Beschreibung realer Vorgänge besondere Gelegenheiten zu argumentieren („Warum ist der Zuwachs hier am größten?"), zu modellieren („Wie bewegt sich ein Läufer?") und Probleme zu lösen („Wie müsste der Graph für die Geschwindigkeit aussehen?"). Der gezielte Wechsel zwischen den mathematischen Darstellungsarten (Graph, Tabelle, Term) wird als bewusste Problemlösestrategie genutzt.

Dabei wird eine Vielfalt an Situationen und sinnstiftenden Kontexten mit realistischen Daten genutzt, da durch die Verwendung von CAS die Reduktion auf händisch berechenbare Funktionen obsolet geworden ist.

Mithilfe von CAS können weitere Funktionsklassen integriert werden, sodass vergleichende Analysen hinsichtlich der Muster und Strukturen verschiedener Funktionsarten möglich sind. Im Zentrum steht nicht das syntaktische Ermitteln charakteristischer Punkte nach bestimmten Verfahren und Regeln (wie in einer Funktionsuntersuchung) oder von Ableitungen (wie bei Extremalproblemen), sondern im Fokus stehen Argumentationen und Interpretationen sowohl im inner- wie im außermathematischen Sinne. Das Erweitern der Funktionsklassen ist immer mit dem Ziel verbunden, weitere Modelle für Kontexte zu erhalten (z.B. um exponentielles Wachstum beschreiben zu können). Das Entwickeln von Ableitungsregeln dient in besonderer Weise dazu, innermathematische Strukturen und Verallgemeinerungen eigenständig aufzustellen. Dies geschieht im Sinne der zweiten Grunderfahrung, nach der Mathematik als geistige Schöpfung mit einer spezifischen Art der Erkenntnisgewinnung kennengelernt werden soll.

Funktionsgraphen können in schneller Folge in unterschiedlicher Auflösung dargestellt und untersucht werden (z.B. in der Nähe von charakteristischen Punkten). Durch die schnelle Verfügbarkeit von Graphen werden Zusammenhänge und Strukturen umgehend sowohl global als auch lokal (durch Zoomen) sichtbar und können in der wechselweisen Interpretation mit Termen und Tabelle plausibel gemacht werden. Die Betrachtung und Variation einer Vielzahl und Vielfalt von Situationen und Modellen ermöglicht, dass mathematische Zusammenhänge experimentell erkundet und systematisiert werden.

Komplexe symbolische Ausdrücke können mit einem CAS schnell manipuliert sowie untersucht und Gleichungen gelöst werden. Dadurch besteht die Chance, dass Interpretation und Verstehen symbolischer Darstellungen im Mittelpunkt des Lernprozesses bleiben. Das Schreiben und Lesen der Ein- und Ausgabe von Ausdrücken verlangen besondere Sorgfalt und die Fähigkeit, Termstrukturen flexibel zu erkennen und aufzubauen. Die unter 3.2.2, „Leitidee: Funktionaler Zusammenhang“, genannten Funktionsklassen sind, in Form eines tiefgründig erarbeiteten Grundwissens, eine Ausgangsbasis für weitere Betrachtungen. Verknüpfungen verschiedener Funktionen (z.B. Verkettung mit linearen Funktionen oder ausgewählten Potenzfunktionen) erfolgen nur so weit, wie es für realitätsbezogene Aufgaben notwendig und für die Schülerinnen und Schüler nachvollziehbar ist. Entsprechende Verfahren der Differential- und Integralrechnung (z.B. Kettenregel, Produktintegration und lineare Substitution) werden von den Lernenden strukturell erfasst, aber in ihrer Ausführung an den CAS-Rechner übertragen.

Analysis (Integralrechnung) (Q2/Q4)

Im Sinne einer vorstellungsorientierten Grundlegung wird der Integralbegriff in unterschiedlichen Anwendungssituationen als gemeinsames mathematisches Modell zum Erfassen verschiedener inner- und außermathematischer Problemstellungen entwickelt und schrittweise systematisiert. Zu diesen Problemen beim Einstieg gehören die Rekonstruktion von Beständen aus Änderungsraten oder das näherungsweise Bestimmen von Inhalten krummlinig begrenzter Flächen. Für die notwendigen Rechenschritte bei der numerischen Bestimmung von Flächeninhalten bzw. Rekonstruktion von Beständen werden Tabellenkalkulationen in CAS-Rechnern eingesetzt. Die Zielstellung der Präzisierung der numerischen Ergebnisse durch Verfeinerung der Schrittweite bietet die Grundlage für das Verstehen des Grenzprozesses, der zum Integralbegriff führt.

Nach Aneignung der notwendigen Grundbegriffe und Symbolik setzen sich die Schülerinnen und Schüler mit Eigenschaften bestimmter Integrale (Faktorregel, Summenregel, Vorzeichenumkehr bei Vertauschen der Grenzen, Additivität der Grenzen) auseinander, wobei CAS zur Visualisierung exemplarischer Zusammenhänge dienen kann. Das Erkennen der inhaltlichen Zusammengehörigkeit der grundlegenden Fragestellungen (Frage nach der Änderungsrate versus Frage nach dem Bestand) führt zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, der auch dazu dient, bestimmte Integrale explizit berechnen zu können. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wird geometrisch anschaulich begründet und dazu genutzt, bestimmte Integrale als Flächenbilanz oder Flächen zwischen Funktionsgraphen auch in Anwendungskontexten zu berechnen. Entsprechend den Vorgaben im Kapitel 3.2.2 sind elementare Regelkenntnisse zur Bildung einer Stammfunktion erforderlich.

Für weiterführende Integrationsverfahren nutzen die Schülerinnen und Schüler CAS-Rechner. Dabei ist es notwendig, dass sie Strukturen von Funktionsgleichungen erfassen und beschreiben können. Sie erkunden den Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation und können ihn an geeigneten Beispielen erläutern.

Analytische Geometrie (Q3)

Die inhaltliche Gestaltung des Themengebietes ergibt sich vor allem aus den Leitideen „Raum und Form“ und „Messen“. Dem Grundgedanken der analytischen Geometrie nähert man sich durch konkrete Darstellungs-, Lage- oder Vermessungsprobleme, bei denen eine Koordinatisierung notwendig wird. Der Einsatz von CAS dient hier zu Berechnungen im Zusammenhang mit geometrischen Problemen der Lage und des Maßes.

Für die analytische Beschreibung komplexerer linearer Gebilde (Geraden, Ebenen, aber auch Strecken und Vielecke) wird der Vektorbegriff nützlich. Das symbolische Operieren mit Vektoren soll mit Bezug auf die geometrisch-anschaulichen Wirkungen erarbeitet werden. Ausgehend von elementargeometrischen oder realitätsbezogenen Fragestellungen werden die verschiedenen Formen einer Ebenengleichung (Parameterform, Koordinatenform, Normalenform) sinnvoll genutzt. Mit diesen Werkzeugen lassen sich nun realistische Probleme modellieren und bearbeiten (wie z. B. Projektionen oder Abstand von Flugbahnen).

Im Wechsel zwischen geometrischer Darstellung und analytischer Bearbeitung wird das Wissen an weiteren realistischen oder elementargeometrischen Problemen vertieft. Dabei werden Winkel-, Flächen- und Abstandsberechnungen in analytischer Schreibweise erarbeitet. Die im Unterricht zu entwickelnden Begriffe (z. B. Kollinearität, Ortsvektor, Richtungsvektor, Skalarprodukt) werden theoretisch systematisiert, ohne den Begriff des Vektorraum allgemein zu thematisieren. Ebenso systematisiert werden Grundkonzepte zur Untersuchung von Lagebeziehungen und Bestimmung von Abständen bzw. Winkelmaßen. Die systematischen Untersuchungsalgorithmen führen auch auf die Entwicklung von Verfahren der linearen Algebra hin. Nach theoretischer Durchdringung von Zusammenhängen und Verfahren wird für Lösungsalgorithmen zunehmend der CAS-Rechner genutzt. Hierbei gibt es vielfältige Anlässe für problemlösendes Arbeiten und mathematisches Argumentieren, wobei die Schülerinnen und Schüler lernen, elementargeometrische und realitätsbezogene Problemstellungen mithilfe von Koordinaten und Vektoren zu modellieren und die verfügbaren Algorithmen zur Problemlösung zu nutzen.

Stochastik (Wahrscheinlichkeitsrechnung - Beurteilende Statistik) (Q2/Q4)

Eine Erweiterung der Begriffe der beschreibenden Statistik ergibt sich aus der Notwendigkeit, die Ergebnisse von Erhebungen zu bewerten, einzuschätzen und für zukünftige Prognosen zu nutzen. Dazu werden verschiedene Verfahren der beurteilenden Statistik entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler nutzen sachgerecht Modelle und Größen der Stochastik, um zufallsbedingte Situationen zu untersuchen und zu beurteilen. Um der Bedeutung dieses Themengebietes gerecht zu werden, sollten dabei insbesondere medizinische, naturwissenschaftlich-technische und ökonomische Fragestellungen betrachtet werden.

Eine Erweiterung der Begriffe der beschreibenden Statistik ergibt sich aus der Notwendigkeit, die Ergebnisse von Erhebungen zu bewerten, einzuschätzen und für zukünftige Prognosen zu nutzen. Die Schülerinnen und Schüler nutzen sachgerecht Größen der Stochastik, um in zufallsbedingten Situationen zu argumentieren.

Unter Zuhilfenahme von CAS (z. B. des Zufallsgenerators) ist das Simulieren von Zufallsprozessen, insbesondere das Erzeugen von Stichproben möglich. So lassen sich umfangreiche Fallzahlen untersuchen, die etwa beim Würfeln von Hand kaum zu erreichen sind. Die experimentelle Erkundung von Zufallsphänomenen (z. B. Gesetz der großen Zahl) wird dadurch in besonderer Weise begünstigt.

Bei der Beschreibung mathematischer Gesetzmäßigkeiten innerhalb der Stochastik werden zur Untersuchung von Ereignissen Grundbegriffe der Mengenlehre und deren Verknüpfungen genutzt. Dabei sollte die Vermittlung inhaltlicher Kompetenzen zu dieser Thematik nicht separat, sondern verknüpft mit den Themen der Stochastik erfolgen.

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen in Anwendungssituationen (z. B. Stichprobenauswahl aus einer Grundgesamtheit) mithilfe der Urnenmodelle („Ziehen ohne bzw. mit Zurücklegen"), welche Modellierung mittels einer stochastischen Verteilung sinnvoll ist. Sie nutzen diese ggf. in verschiedenen Darstellungen und lernen verschiedene Methoden der stochastischen Modellierung (Binomial- und hypergeometrische Verteilung) und der Argumentation kennen und wenden sie in verschiedenen Situationen an. Insbesondere entwickeln die Schülerinnen und Schüler ein inhaltliches Verständnis des Begriffs der stochastischen Unabhängigkeit.

Die Untersuchung von $k\sigma$-Intervallen bereitet ein inhaltliches Verständnis für die Idee Hypothesentest vor. Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass ein Hypothesentest nicht zu einem sicheren Urteil führt. Für diesen Test können sie die Fehler 1. und 2. Art benennen und im Kontext deuten.

Das Simulieren (händisch, mittels Software) von Zufallsprozessen dient zum Sammeln von Erfahrungen mit dem Zufall, dem Überprüfen der Intuition und ggf. ihrer Korrektur und dem Schätzen von unbekannten Wahrscheinlichkeiten. Durch die Zuhilfenahme geeigneter Software lassen sich umfangreiche Fallzahlen untersuchen, wobei der Wahrscheinlichkeitsbegriff durch Erkundung von Zufallsphänomenen (z.B. Gesetz der großen Zahlen) in Abhängigkeit von der Fallzahl vertieft wird.